調査報告

放物運動における最小の到達点速度と最大の水平到達距離に関する考察

工藤　友裕* 東田　洋次**

The consideration about the initial state with relationship of the minimum speed at a given point and the furthest hitting point of free falls

Tomohiro KUDO*, Yoji HIGASHIDA**

In this paper, leading an angle of projection and initial speed, with holds the minimum speed at a given point of orbit in free falls, is shown. It would be usually shown in algebraically by explaining a horizontal displacement. We show that, it can be calculated by the relation of an angle of projection with the furthest hitting point. It may be useful for understanding of free falls in elementary physics.

キーワード：自由落下, 最小到達速度, 最大到達距離を与える仰角, 初等物理

Keywords: free fall, minimum speed, angle of projection with furthest hitting point, elementary physics

1.　まえがき

2018年度の高専ロボコンでは、「ボトルフリップ･カフェ」というテーマで、ペットボトルを投げ上げて高い位置のテーブルの上に立たせる競技が行われた。ペットボトルを投げてテーブルの上に到達させるまでの運動は、初等物理の放物運動の応用でもある。ロボット設計では様々な最適化の方法が考えられるが、その中の一つとして、ペットボトルを投射後、最高点より下でテーブルに達した時の速度が最小となるような条件を求めるのも一つの方法である。この条件については、放物運動における変位の関係式から、与えられた点を通るための投射初速度の関係式を導くことができる。また、関連した情報として放物運動における最大の水平到達距離を与える仰角についての報告がなされている。[1] 後者の方法を用いることでも、ペットボトルがテーブルの上に達したときの速度を最小にする投射条件が得られることを報告する。まずは、次のように通常の放物運動から、投射条件を導いてみる。

* リベラルアーツ系
〒861-1102 熊本県合志市須屋 2659-2
Faculty of Liberal Arts, 2659-2, Suya, Koshi-shi, Kumamoto, Japan 861-1102
** 拠点化プロジェクト系
〒866-8501　熊本県八代市平山新町 2627
Faculty of Project Centers, 2627 Hirayama-Shinmachi, Yatsushiro-shi, Kumamoto, Japan 866-8501

2.　放物運動の軌道の式を用いた導出

投射位置を原点にとり、重力加速度の大きさを g、水平方向を x 方向、鉛直方向を y 方向とする。図1の様に初速度の大きさを v_0、仰角を θ として投射後、P点 (位置 (X, h)) を通ると仮定する。

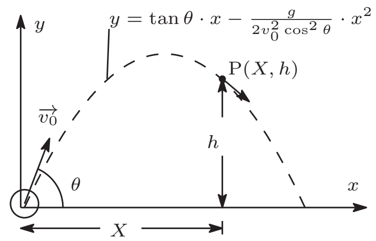

図1　放物運動

このときの関係式は、放物線の方程式に代入して

$$h=\tan\theta\cdot X-\frac{gX^2}{2v_0^2\cos^2\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

となる。ここで $\cos^2\theta$ を $\tan\theta$ を用いて書き直した式は、

$$\frac{gX^2}{2v_0^2}\left(1+\tan^2\theta\right)-X\cdot\tan\theta+h=0\cdots\cdots\cdots (2)$$

となる。$\tan\theta=q$ として書き直し、v_0^2 について解くと、

$$v_0^2=\frac{gX^2}{2}\cdot\frac{1+q^2}{Xq-h}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

となる。ここでP点での速度が最も小さくなるようにする

には初速度 v_0 が最小すなわち v_0^2 が最小となればよいので、(3) 式で q で微分した式を 0 とおいて q について解くと（2 階微分と極小の条件からも）

$$\begin{cases} \dfrac{dv_0^2}{dq} = \dfrac{gX^2\left(Xq^2-2hq-X\right)}{2\left(Xq-h\right)^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2v_0^2}{dq^2} = \dfrac{gX^2\left(h^2+X^2\right)}{\left(Xq-h\right)^3} > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad q = \frac{h+\sqrt{h^2+X^2}}{X} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

となる。最小となる初速度 $\hat{v_0}$ を求めるため (4) 式を (3) 式に代入して

$$\hat{v_0}^2 = g\left(h+\sqrt{h^2+X^2}\right)$$

$$\therefore \quad \hat{v_0} = \sqrt{g\left(h+\sqrt{h^2+X^2}\right)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

と求められる。また条件を満たす仰角 $\hat{\theta}$ についての関係式は $q=\tan\theta$ を（4) 式に代入して、

$$\tan\hat{\theta} = \frac{h+\sqrt{h^2+X^2}}{X} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

と求められる。次に、この関係式を、最大の水平到達距離を与える初速度の関係から導いてみる。

3. 最大の水平到達距離を与える仰角を用いた導出

以前の報告 [1] では、問題の定義を図 2 の様に定式化し、投射点の高さを h, 初速度の大きさを v_0，重力加速度を g としたときの落下点までの水平到達距離が最大値 $\hat{X}$ となる仰角 $\hat{\theta}$ を求めた。結論は、落下点の速度を v_1 とすると、

$$v_1 = \sqrt{v_0^2+2gh} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

$$\tan\hat{\theta} = \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2gh}{v_0^2}}} \cdots\cdots (8)$$

$$\hat{X} = \frac{v_0\cdot v_1}{g} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2+2gh}}{g} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

であった。

次に、図 3 のように、投射点より落下点が h だけ高い場合を考える。以下、落下点を到達点と言い換えることにする。

この場合の速度ベクトル図は図 4 のようになる。到達点の水平距離 X と到達点までの時間 t_1、ベクトル図の $\vec{v_0}$ と $\vec{v_1}$ で作られる三角形の面積 S との間に、

$$X = v_0\cos\theta\cdot t_1 = \frac{g\cdot t_1\cdot v_0\cos\theta}{g} = \frac{2S}{g} \cdots\cdots (10)$$

という関係が成り立つ。

X が最大の水平到達距離 $\hat{X}$ となるときの条件は S が最大となる条件であることから図 5 の様な関係が成り立つ。

つまり、初速度の大きさと到達点の高さが決まれば、力学的エネルギー保存則と、初速度および到達点の速度のベ

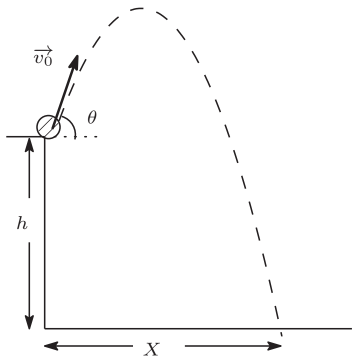

図 2　落下点が低い場合

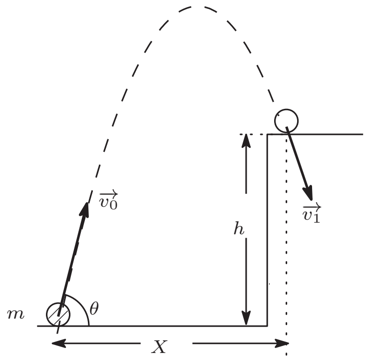

図 3　落下点が高い場合

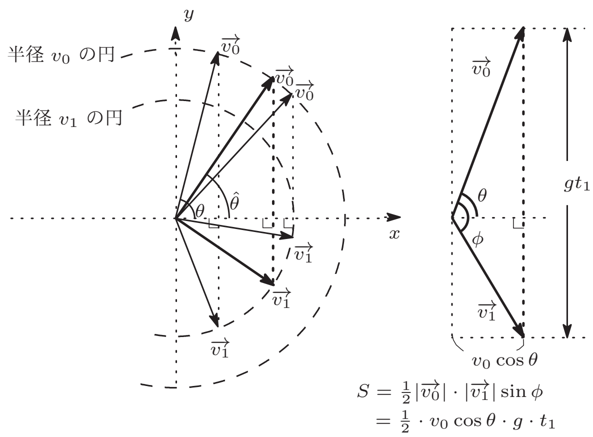

図 4　投射時と落下時の速度ベクトル

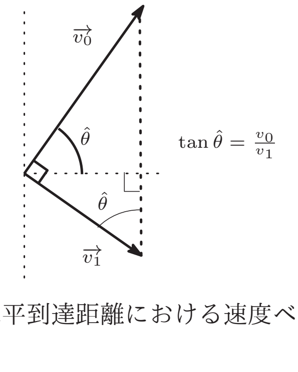

図 5　最大の水平到達距離における速度ベクトル

クトル図の関係を用いて最大の水平到達距離を表す関係が導かれる。ゆえに、投射点より到達点が h だけ高い場合は、式 (7),(8),(9) の h を $-h$ に置き換えた次の関係式

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \cdots\cdots (11)$$

$$\tan\hat{\theta} = \frac{v_0}{v_1} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{2gh}{v_0^2}}} \cdots\cdots (12)$$

$$\hat{X} = \frac{v_0 \cdot v_1}{g} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2-2gh}}{g} \cdots\cdots (13)$$

が成り立つ。

さて、ここからは投射点からの高さ h, 水平距離 X の点が与えられた時、到達点での速度を最小にする条件を導いてみる。投射点から水平変位 X、高さ h の点に最小の速度で到達するためには初速度 v_0 の大きさを最小にしつつ、条件を満たす仰角を求める必要がある。ここで X が最大の水平到達距離となる条件を満たした初速度 $\hat{v_0}$ と仰角 $\hat{\theta}$ および到達速度 $\hat{v_1}$ との関係を求めてみる。まず、

$$\hat{v_1} = \sqrt{\hat{v_0}^2 - 2gh} \cdots\cdots (14)$$

$$\tan\hat{\theta} = \frac{\hat{v_0}}{\hat{v_1}} \cdots\cdots (15)$$

$$X = \frac{\hat{v_0}\cdot\hat{v_1}}{g} = \frac{\hat{v_0}\sqrt{\hat{v_0}^2-2gh}}{g} \cdots\cdots (16)$$

の関係が満たされるとして、式 (16) より、

$$\hat{v_0}^2(\hat{v_0}^2 - 2gh) - g^2X^2 = 0 \cdots\cdots (17)$$

$$\therefore\ \hat{v_0}^2 = g\left(h \pm \sqrt{h^2+X^2}\right) \cdots\cdots (18)$$

が導かれるが、$\hat{v_0}^2 > 0$ より

$$\hat{v_0}^2 = g\left(h + \sqrt{h^2+X^2}\right) \cdots\cdots (19)$$

$$\therefore\ \hat{v_0} = \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2+X^2}\right)} \cdots\cdots (20)$$

となる。この式 (19) を式 (14),(15) に代入して、

$$\begin{aligned}\hat{v_1} &= \sqrt{g\left(h+\sqrt{h^2+X^2}\right) - 2gh} \\ &= \sqrt{g\left(\sqrt{h^2+X^2} - h\right)} \cdots\cdots (21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan\hat{\theta} &= \sqrt{\frac{g\left(h+\sqrt{h^2+X^2}\right)}{g\left(\sqrt{h^2+X^2}-h\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(h+\sqrt{h^2+X^2}\right)^2}{X^2}} \\ &= \frac{h+\sqrt{h^2+X^2}}{X} \cdots\cdots (22)\end{aligned}$$

を得る。この式 (20),(22) は、先に求めた、式 (5),(6) と同じである。もしこの条件を満たす v_0 より小さい初速度であれば到達点の高さ h の時の最大の水平到達距離は X より小さくなるので指定された点に到達できない。したがって上の条件が、到達できる初速度の中で最小のものであると言える。

導出してみると、どちらの方法でも比較的簡単に求められることがわかったが、むしろ前節の方法の方が分かりやすいので、最大の水平到達距離を与える仰角を使う方法にはメリットは見当たらないようにも思える。しかし、次節で述べるようにむしろ両者の関係から逆に最大の水平到達距離を与える仰角を前節の方法から導くことができることがわかる。

4. 到達速度が最小の条件と投射方向の幾何学的関係について

前節までに得られた投射条件を図に表すと図 6 のようになる。

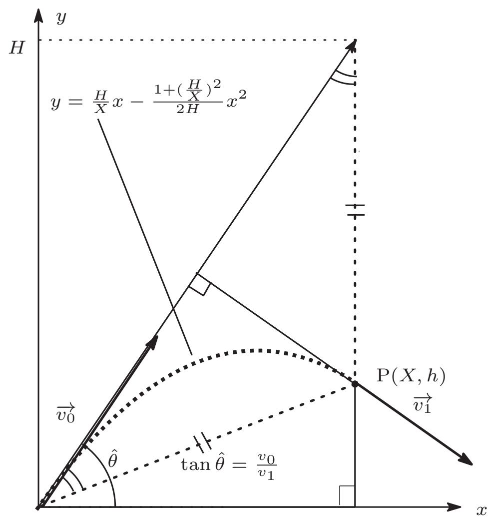

図 6　最小到達速度の投射条件

この時の放物線の方程式は,$H = h + \sqrt{h^2+X^2}$ として

$$y = \frac{H}{X}\cdot x - \frac{1+\left(\frac{H}{X}\right)^2}{2H}\cdot x^2 \cdots\cdots (23)$$

となる。この方程式には、重力加速度 g が明示的には含まれていないが、この軌道となるためには初速度の大きさ v_0 が $v_0 = \sqrt{gH}$ である条件が付くので、重力加速度が関わってくる。この初速度は、真上に物体を投げ上げたとき、$\frac{H}{2}$ の高さまで上がる速度である。もし水平距離 X に制限がないのであれば当然のことながら $X = 0$ の時、つまり P 点の真下から $v_0 = \sqrt{2gh}$ で投げ上げたときに高さ h の到達点での速度 $v_1 = 0$ となり最低の到達点速度となる。

ところで、図 6 において、初速度 $\vec{v_0}$ と到達速度 $\vec{v_1}$ の向きを逆にしてみると高さ h の点からの投射になる。投射運動では時間的に反転しても同じ軌道を描くので速度が $-\vec{v_1}$ でつまり仰角 $\frac{\pi}{2} - \hat{\theta}$ で投射したときに、水平到達距離が最大の X となる。また、高さ h から投射して水平到達距離

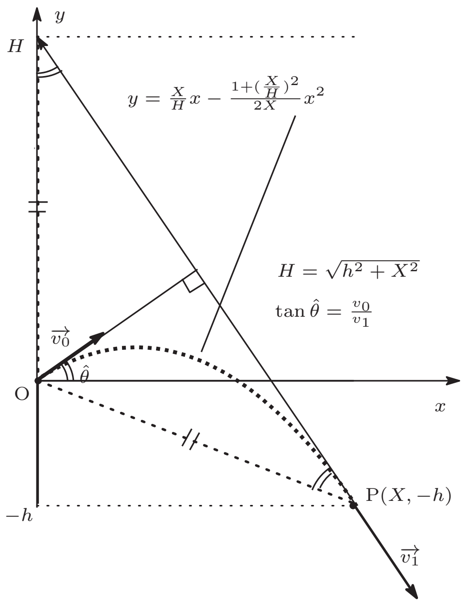

図 7　落下点が低い場合の最大到達距離と投射条件

X の点に達したときの速度が最小になる条件として前節と同様の議論ができることがわかる。繰り返しになるが、2 つの問題

- 大きさが一定の初速度で、高さ h の点から投射したときの水平到達距離を最大にする初速度の向き (仰角) を決定する。
- 高さ h で水平到達距離 X の点に到達するための最小の初速度の大きさと向き（仰角）を決定する。

は、同じ関係式を元に解決されると言える。このことより逆に式 (5),(6) から

$$X = \frac{\hat{v_0}^2}{g}\sqrt{1-\frac{2gh}{\hat{v_0}^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

$$\tan\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{2gh}{\hat{v_0}^2}}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

が導出される。更に式 (25) で h を $-h$ に、$\hat{v_0}$ を v_0 に置き換えれば式 (8) と同じとなる。したがって、指定された点を最小の到達速度で通るような初速度と仰角を求める関係式から、投射点と到達点の高さの差と初速度から最大の水平到達距離および初速度の仰角を表す関係式が求められる。図 2 の状況を図 6 を元に図 7 の様に変えて描いてみる。これにより高さ h の点から投射するという状況を投射点から h だけ低いところにむけて投射すると変わる。これにより初速度の大きさ v_0 が与えられた時、最大到達距離として X を (9) 式の右辺を用いて求め、そこに到達するような初速度の仰角として図 7 のような幾何学的な状況が決定される事がわかる。

g, h を定数として、3 つの変数 v_0, X, q の間に (3) 式が成り立つとき、運動として実現される範囲で、

$$\frac{\partial X}{\partial q} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial v_0}{\partial q} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

が成り立ち、以上のような関係が導かれるといえる。(3) 式のイメージをグラフに表すと図 8 の様になる。

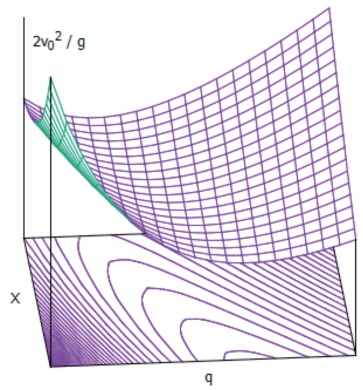

図 8　初速度の 2 乗 (v_0^2) と水平到達距離 X，仰角の正接 q の関係

上下軸が $\frac{2v_0^2}{g}$ を表し、他の軸が X と q を表している。h は 1 として描いてある。図 8 より、v_0 が一定で、X が最大となる q を結ぶ曲線と、X が一定で v_0 が最小となる q を結ぶ曲線が一致する状況がイメージできる。

5.　む す び

初等物理の学習課題である放物運動の応用として、到達点の速度を最小にするような初速度の問題を提示し、解を 2 通りの方法で示し、その関係について考察した。

熊本高専熊本キャンパスのロボコン部の学生には 2018 年度のコンテストにおけるロボット製作時に相談を受けたので、今回示した最大到達距離の仰角を用いた方法で条件を導き、解を示したが、実際のロボットつくりには使われなかったようである。ペットボトルを安定して飛ばす技術や着地時の衝撃で倒れないようにする技術など様々なことを考える必要があり、単なる質点の運動だけでは参考にならなかったようだ。実際のコンテストのルールでは、自動ロボットはゴールのテーブルに近づいていくことができるため、ペットボトルの着地の衝撃を小さくするにはできるだけゴールの近くから投射する方が最適な条件を得やすい。

（令和元年 9 月 25 日受付）
（令和元年 12 月 5 日受理）

参考文献

（1）　工藤友裕　他,“放物運動の最大到達距離を与える仰角を簡単に導く方法”，熊本高等専門学校研究紀要 第 5 号, pp.116-119.（2013）