速　報

マクマホン立方体を用いたテンソル分解理解支援の教材開発

山本　直樹 [1,*]　石田　明男 [2]　大石　信弘 [1]　村上　純 [1]

Development of Teaching Materials to Support Understanding of Tensor Decomposition Using MacMahon's Coloured Cubes

Naoki Yamamoto[1,*], Akio Ishida[2], Nobuhiro Oishi[1], Jun Murakami[1]

In this paper, we devised a 3D puzzle using the MacMahon's cubes and represented this with a 2D map by using the matrix unfolding used to calculate HOSVD. Using this map representation, we developed teaching materials to learn some of calculation processes of HOSVD. In order to investigate the visibility of the map and the difficulty level of the puzzle, the teaching materials are tried by our students and others at the Open Campus Event. As a result, it was confirmed that most users could understand the map and that the puzzle was rather easy to solve. Therefore, it was thought that the users also could understand the matrix unfolding.

キーワード：マクマホン立方体、立体パズル、行列展開、HOSVD、教材開発

Keywords：MacMahon's cubes, 3D puzzle, Matrix unfolding, HOSVD, Development of teaching materials

1．はじめに

ビッグデータ分析では、テンソル分解がよく用いられている(1)。これは、テンソルで表された高次元データを、行列とテンソルの積やベクトルの積の和に分解するものである。ただし、高階テンソルは多次元配列と同様の意味で用いる。我々はこれまで、テンソル分解を利用した医療データ分析(2)や、立体パズルを用いたテンソル分解教育に関する研究(3)などを行ってきた。後者では、ルービックキューブやインスタント・インサニティを立体パズルとして取り上げているが、実際のパズルを例示する際に、インスタント・インサニティは難解であるので、より解き易いパズルの必要性を実感していた。

そこで、マクマホン立方体(4)を利用して構成した立体パズルを用いて、テンソル分解の 1 つである高次特異値分解（HOSVD）(5)の計算過程に現れる n-モード行列展開その逆の操作である畳み込みの原理を学ばせる教材を開発した。本論文では、まずマクマホン立方体と立体パズルについて説明し、次に立体パズルの高階テンソル表現およびそのマップ表現について述べる。そして、それらの表現を用いて、開発した教材について述べ、最後に本校のオープンキャンパスで中学生・高専生らに試用してもらい、マップ表現の見易さや行列展開等の理解度などについて分析した結果も示す。

2．マクマホン立方体を用いた立体パズル

マクマホン立方体は、立方体の各面が異なる 6 色で彩色されたもので、各面の色の組み合わせにより 30 種類のキューブが得られる(4)。本論文ではこの 30 種類から 4 種類のキューブを選び、それらをパズルピースとして立体パズルを構成した。図 1 に木製の立方体に色シールを貼付して作製した 4 種類のキューブからなる立体パズルを示す。各キューブの配色は図 2 に展開図として表す。使用した色は赤(1)、白(2)、青(3)、緑(4)、黄(5)、黒(6) の 6 色で、括弧内の数字は色番号である。展開図で縦横の並びのクロスする部分がキューブの上面（赤）となる。

この立体パズルは、図 1 で上面（赤）から見て、各キューブを2 × 2に並べて構成した直方体について、各側面の色が同色となるように揃えるものであり、インスタント・イ

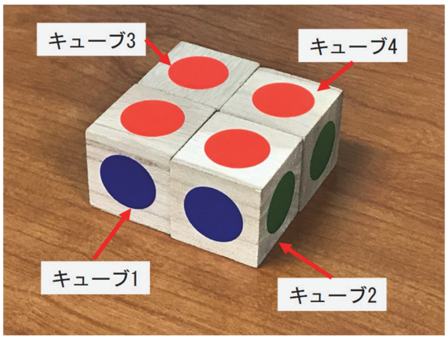


図 1　自作した立体パズル

[1] 電子情報システム工学系
〒861-1102　熊本県合志市須屋 2659-2
Faculty of Electronics and Information Systems Engineering,
2659-2 Suya, Koshi-shi, Kumamoto, Japan 861-1102
[2] リベラルアーツ系
〒861-1102　熊本県合志市須屋 2659-2
Faculty of Liberal Arts,
2659-2 Suya, Koshi-shi, Kumamoto, Japan 861-1102
* Corresponding author:
E-mail address: naoki@kumamoto-nct.ac.jp (N. Yamamoto).

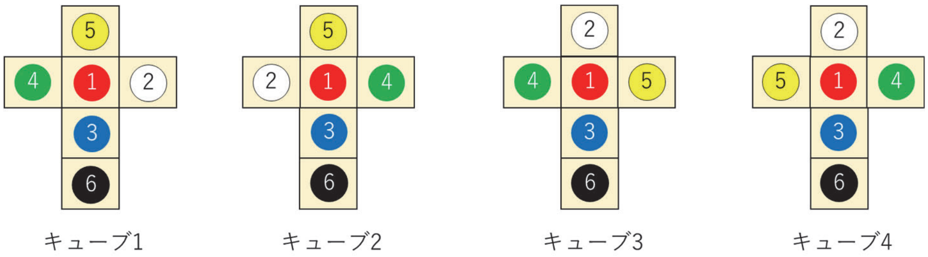


図 2　各キューブの配色の展開図

表 1　図 3 における各キューブの配色情報

キューブ番号	テンソル要素番号	キューブ配色（値）	キューブ番号	テンソル要素番号	キューブ配色（値）
1	(2,1,2,1,1)	緑（4）	3	(2,1,2,1,2)	緑（4）
	(1,2,2,1,1)	赤（1）		(1,2,2,1,2)	赤（1）
	(2,2,1,1,1)	青（3）		(2,2,1,1,2)	青（3）
	(3,2,2,1,1)	黒（6）		(3,2,2,1,2)	黒（6）
	(2,2,3,1,1)	黄（5）		(2,2,3,1,2)	白（2）
	(2,3,2,1,1)	白（2）		(2,3,2,1,2)	黄（5）
2	(2,1,2,2,1)	白（2）	4	(2,1,2,2,2)	黄（5）
	(1,2,2,2,1)	赤（1）		(1,2,2,2,2)	赤（1）
	(2,2,1,2,1)	青（3）		(2,2,1,2,2)	青（3）
	(3,2,2,2,1)	黒（6）		(3,2,2,2,2)	黒（6）
	(2,2,3,2,1)	黄（5）		(2,2,3,2,2)	白（2）
	(2,3,2,2,1)	緑（4）		(2,3,2,2,2)	緑（4）

ンサニティと比べて解くのが容易なパズルとして、マクマホン立方体のキューブを利用して考案した。

3．立体パズルの高階テンソル表現とマップ

3.1 立体パズルの高階テンソル表現

既述のように、本論文で扱う高階テンソルとは多次元配列のことで、例えば 1～3 階のテンソルはそれぞれ、ベクトル、行列、3 次元配列に対応する。ここでは、図 1 の立体パズルを多次元配列で表すために、図 3 のような 5 階テンソルでモデル化した。すなわち、図 1 の$1\times1\times1$の各キューブを$3\times3\times3$に拡大し、各面の中央の要素に元のキューブの配色データを与えた。元の各キューブは2×2に並べられるため、5 階テンソルのサイズは$3\times3\times3\times2\times2$となる。

いま、この 5 階テンソルを$\boldsymbol{\mathcal{A}}$として、その(i,j,k,l,m)要素をa_{ijklm}とすると、このテンソルは次式で表される。

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \left(a_{ijklm}\right), (i,j,k = 1,2,3;\ l,m = 1,2) \qquad (1)$$

表 1 に、このテンソルに与える要素ごとの配色値を示す。ただし、表に示されていない要素番号の要素値は全て 0 とする。図 3 における n-mode, $(n = 1,2,\dots,5)$とは、テンソルデータの矢印で示した各方向を表し，それぞれはテンソル$\boldsymbol{\mathcal{A}}$の添字i,j,k,l,mに対応する。

3.2 立体パズルのマップ

この立体パズルをマップで表すために、高次特異値分解（HOSVD）の計算アルゴリズムで使用される n-モード行列展開[5]を用いる。HOSVD は行列の特異値分解（SVD）を 3 階以上の高階テンソルの分解に拡張したもので、n-モード行列展開とは高階テンソルを行列に変換する操作のことである。ここでは、3 階テンソルの 1-モード行列展開を利用するため、そのアルゴリズムを次に示す。

［（アルゴリズム 1） **3 階テンソルの 1-モード行列展開**］

入力：　サイズ$I\times J\times K$の 3 階テンソル$\boldsymbol{\mathcal{T}}$

出力：　サイズ$I\times J\cdot K$の 1-モード行列展開$\boldsymbol{T}_{(1)}$

（ステップ 1）　3 階テンソル$\boldsymbol{\mathcal{T}}$から、部分行列$\boldsymbol{T}_j = \left(t_{*j*}\right), (j = 1,2,\dots,J)$を抽出し、$\boldsymbol{T}_{(1)} = \left(\boldsymbol{T}_1|\boldsymbol{T}_2|\cdots|\boldsymbol{T}_J\right)$と横に結合する。なお、$\left(t_{*j*}\right)$は、$j$を固定して$i = 1,2,\dots,I$および$k = 1,2,\dots,K$として得られる行列である。

（ステップ 2）　$\boldsymbol{T}_{(1)}$を返す。

（アルゴリズム終わり）

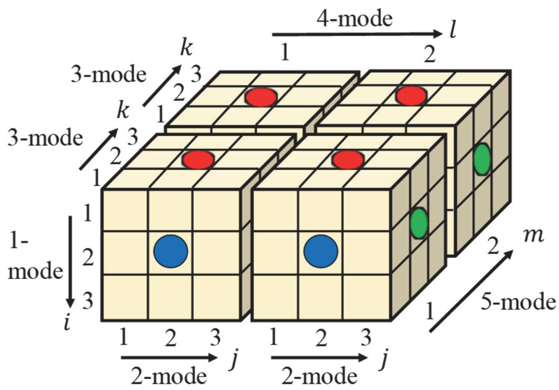


図 3　立体パズルの 5 階テンソル表現

次に、この立体パズルのマップ作成のアルゴリズムを示す。

［(アルゴリズム 2) 立体パズルのマップ作成］

入力： サイズ$3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$の 5 階テンソル$\boldsymbol{\mathcal{A}}$

出力： 立体パズルのマップ行列$\boldsymbol{A}_{\mathrm{map}}$

（ステップ 1） $\boldsymbol{\mathcal{A}}$から、各キューブの 3 階テンソル$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{l,m} = (a_{***lm}), (l,m = 1,2)$を抽出する。ここで、$(a_{***lm})$は$l,m$を固定した$i,j,k = 1,2,3$の 3 階テンソルである。

（ステップ 2） ステップ 1 で得られた$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{l,m}, (l,m = 1,2)$にそれぞれアルゴリズム 1 を適用し、1-モード行列展開$\boldsymbol{A}_{l,m(1)}$, $(l,m = 1,2)$を求める。

（ステップ 3） ステップ 2 で得られた$\boldsymbol{A}_{l,m(1)}$, $(l,m = 1,2)$を次式のように並べてマップ行列$\boldsymbol{A}_{\mathrm{map}}$を構成する。

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{map}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1,2(1)} & \boldsymbol{A}_{2,2(1)} \\ \boldsymbol{A}_{1,1(1)} & \boldsymbol{A}_{2,1(1)} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

（ステップ 4） $\boldsymbol{A}_{\mathrm{map}}$を返す。

（アルゴリズム終わり）

式(2)における、$\boldsymbol{A}_{1,1(1)}$、$\boldsymbol{A}_{2,1(1)}$、$\boldsymbol{A}_{1,2(1)}$、$\boldsymbol{A}_{2,2(1)}$がそれぞれ、キューブ 1、2、3、4 の部分的なマップ行列である。

4．立体パズルのマップを利用した教材開発

4.1 開発した教材とその使用法

HOSVD のアルゴリズムのうち、高階テンソルを行列に変換する *n*-モード行列展開と、その逆の操作である畳み込みの概念や手順を学習させる目的で、図 4 のような教材をパワーポイントにより開発した。以下に、教材の使用手順を述べる。

(1) 図 4(a)のタイトル画面をディスプレイ上に表示して、パズルの解き方を説明する。

(2) 図 4(b)を表示してマップの見方を説明する。その後、マップを確認しながら、図 1 に示した各キューブを配置する練習をさせる。図 5 にこの様子を示す。ただし、図 4(b)のマップは、3.2 節で述べた式(2)のマップ行列$\boldsymbol{A}_{\mathrm{map}}$の配色値を持つ要素に、色情報と前後・上下・左右の位置情報を付加して作成したものである。

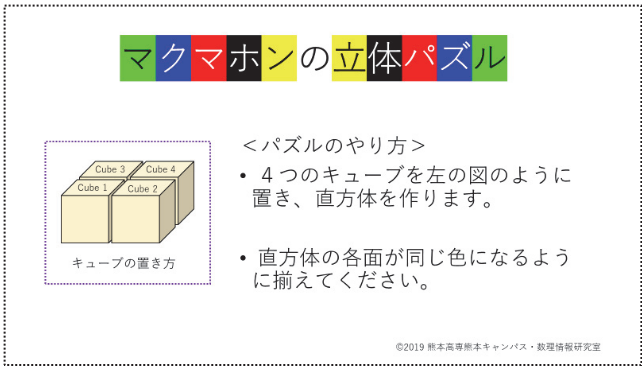
(3) 図 4(c)を表示してパズルを開始し、1 分間の制限時間内に揃えさせる。マウスをクリックするとスタート音が鳴り、経過時間は図 4(c)の下側の青色のバーが左から右に伸びることで知らせる。

(4) 図 4(d)を表示して、このパズルの解の 1 例を確認させる。図 4(b)の時と同様に、マップを見ながら実際にキューブを配置してこの解を確認させる。

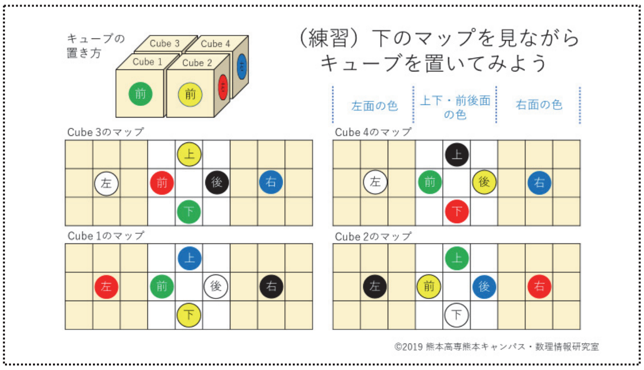
本教材の各キューブのマップは 1-モード行列展開から作成されており、これらのマップを繰り返し確認することで行列展開の学習ができ、さらにマップを確認しながら実際にキューブを配置させることで畳み込みの学習ができると考えている。

4.2 本教材の試用結果

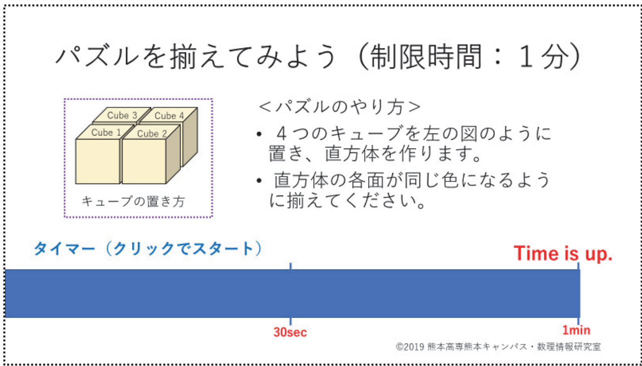
本年 8 月に本校で開催されたオープンキャンパスに訪れた中学生や高専生などに本教材を使用してもらった。使用



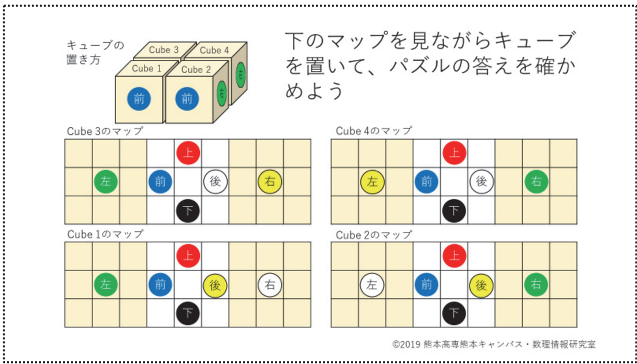
(a) パズルのタイトル表示



(b) 練習用マップの表示



(c) 制限時間内にパズルを解かせる設問画面



(d) 解答確認用マップの表示

図 4 開発した教材の表示例

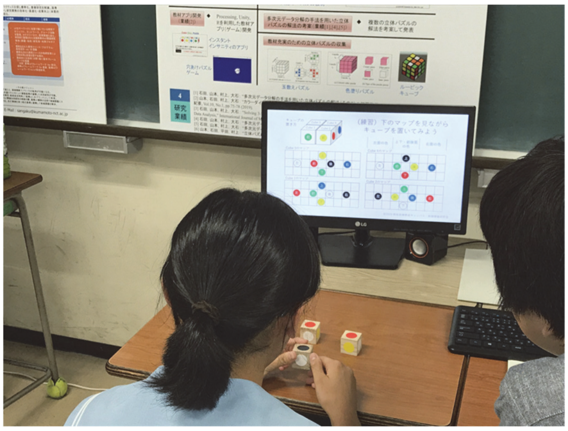


図５　マップの見方の練習の様子

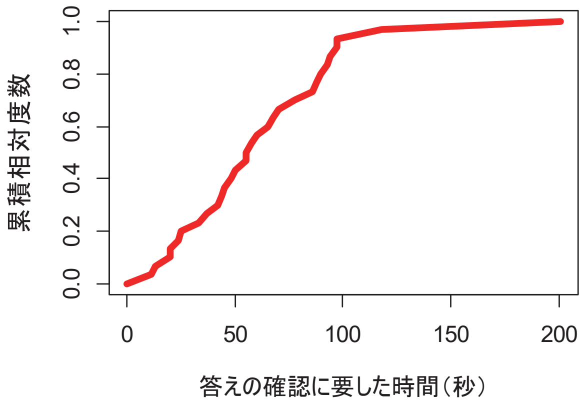


図７　答えの確認に要する時間の累積相対度数分布

者の内訳は、中学生 22 名、高専生・一般 8 名の計 30 名であった。4.1 節で述べたように、利用者に教材を利用してもらった後で、簡単な質問を行った。図 6 に、その内容と集計結果を示す。

質問 1 はパズルの難易度を尋ねるもので、利用者の 70% がパズルを「難しい」と感じているが、図 4(c)の設問では 30 名中 16 名が制限時間内にパズルを揃えることができており、全体の半数以上がクリアできていた。

質問 2 はマップの見易さについてで、「見易い」と「普通」の合計が約 77%であり、本教材のマップは概ね見易いと受け取られていることが分かった。また、使用者全員が、図 4(d)のマップを見てパズルの解答の確認を行うことができたことから、マップの見方は理解できたと考えられる。

図 7 は、使用者がパズルの解答のマップを見ながらキューブを配置して答えを確認できるまでに要した時間の累積相対度数分布を示すものである。確認に要した平均時間は約 63 秒であるが、この時間までに約 57%が答えを確認でき、80 秒までに約 70%、100 秒までに約 93%が確認できていることが分かる。

５．まとめ

我々が従来からテンソル分解教育支援に用いているインスタント・インサニティよりも難易度の低い立体パズルとして、マクマホン立方体のうちのいくつかを用いたパズルを考案した。そして、HOSVD のモード行列展開を応用してこのパズルを 2 次元のマップで表現した。このマップを参照しながらパズルを解くことで、HOSVD の行列展開および畳み込みを学習する教材にした。開発した教材は、オープンキャンパスで中学生や高専生らに使用してもらい、パズルの難易度やマップの見易さを調査した。その結果、難易度については難しいとの回答が多いものの、半数以上は制限時間内に正解を得ることができることが確認できた。またマップは概ね見易いとの評価で、全員が見方を理解できたことが分かった。本教材を用いることで、行列展開および畳み込みの概念を理解できるものと考えられる。

今後の課題としては、本教材を本校高学年や専攻科生の HOSVD の学習用に使用して教育効果を検証することが挙げられる。

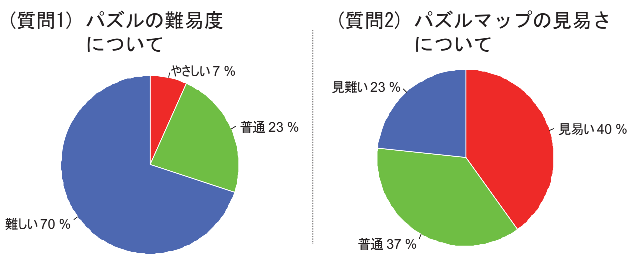


図６　質問の集計結果

謝辞

最後に、本パズルの試用に際して説明等の対応に当たった本校専攻科生の岡田大幸君と五嶋千賀哉君に感謝する。

（令和元年 9 月 25 日受付）
（令和元年 12 月 5 日受理）

参考文献

(1) A. Cichoki :”Era of Big Data Processing: A New Approach via Tensor Networks and Tensor Decomposition”, arXiv Preprint, arXiv:1403.2048 (2014).
(2) A. Ishida, K. Kawakami, D. Furushima, N. Yamamoto, and J. Murakami :”Analysis of Relationships between Amount of Physical Activity of Patients in Rehabilitation and Their ADL Scores Using Multidimensional PCA”, Advances in Intelligent Systems and Computing, Vol.690, pp.147-158 (2017).
(3) 山本直樹，村上純，石田明男 :「テンソル分解プログラミングの理解支援のための立体パズルの利用」，ソフトウェア・シンポジウム 2019 論文集，pp.114-123 (2019).
(4) J. Köller :”MacMahon's Coloured Cubes”, http://www.mathematische-basteleien.de/macmahon.htm, Retrieved Aug. 7, 2019.
(5) L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle :”A Multilinear Singular Value Decomposition”, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Vol.21, No.4, pp.1253-1278 (2000).