報告

物理教材に用いる多角形板の重心を求める手続きの考察

工藤　友裕*　　東田　洋次**

Consideration of Procedure to Finds the Center of Gravity of the Polygonal Plate for Teaching Materials of Physics

Tomohiro KUDO*, Yoji HIGASHIDA**

In this paper, the algorithm and C source code to obtain the center of gravity of the polygonal plate are shown. The executable can be work by the vertex data, and it is useful to make teaching materials of physics.

キーワード：物理教材，多角形版の重心, C 言語プログラム

Keywords：Teaching materials of physics, Center of gravity of the polygonal plate, C source code

1. はじめに

初等物理では，力のモーメントに関連し，物体の重心について学習する(1)．厚紙などを適当な形に切り抜いた物の重心を実験的に求める方法は教科書にも載っており，家庭でも簡単に確認できるため，課題として用いることがある．計算だけで求められる重心であれば，授業中にグループ学習の課題として用いることができる．

著者は実際に授業の課題として，「一様な角形板の重心を求める」問題を学生に課して計算させている．みな同じ答えの場合グループ学習では計算式や答えを丸写ししてしまうことも予想される．学生全員が違う問題，違う答えとなる課題は，取り組む意欲にもつながるのではないかと考え，最近はクラス全員に少しずつ違った形の多角形となるよう問題を作成している．

さて，そういう課題の場合当然，問題の数だけ答えを用意する必要があり，手間が膨大となる．そこで，今後の利用も考慮して頂点の座標を入力することで重心座標を求める手続き（プログラムなど）を考案して教師側の負担軽減を図った．今回は使用しなかったが，同様の目的のソフトウエアはネット上からも手に入れることができるようである(2),(3),(4)．

*　熊本キャンパス共通教育科
〒861-1102　熊本県合志市須屋 2659-2
Kumamoto Campus Dept. of Liberal Studies,
2659-2 Suya, Koshi-shi, Kumamoto, Japan 861-1102
**　八代キャンパス共通教育科
〒866-8501　熊本県八代市平山新町 2627
Kumamoto Campus Dept. of　Liberal Studies,
2627 Hirayama-Shinmachi, Yatsushiro-shi, Kumamoto, Japan 866-8501

この報告では，一様で薄い多角形板の頂点の座標を入力し，重心の位置を求めて出力するプログラムについて，解説と考察を行う．また，物理教材に応用した効果についても述べる．作成したプログラムの特徴としては，多角形の頂点の数に上限がなく，凸でない多角形にも対応でき，多角形から多角形を切り抜いたような穴の開いた多角形にも頂点指定の工夫をすることで対応できるなどが挙げられる．

2. 一様な多角形板の重心を求める手続き

2.1　問題定義と重心を求める手続き

n角形の重心を求める手続きについては，インターネット等で調べると解説がたくさん出てくるので特に新規性は無いが，数値計算を実際に行うため，初等物理で学習する事項に関連して問題定義と説明を行う．

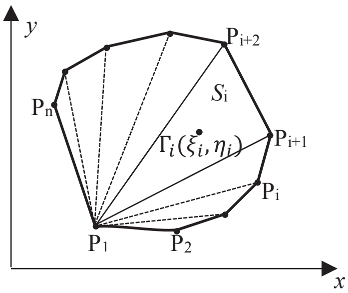


図 1　$n-2$分割されたn角形

簡単のため，図 1 のように凸なn角形$(n \geq 3)$の重心を求めることを考える．多角形の頂点を P_1 から順に左回り（反時計回り）に P_2，P_3，…　P_n とする．2 次元座標系 x-y を

とり，頂点の座標をそれぞれ $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$,…,$P_n(x_n, y_n)$ とする．P_1 から隣を除く他の頂点に対角線を$n-2$本引くことでn角形を P_1 が一つの頂点となる$n-2$個の三角形に分ける．それぞれの三角形の重心を左回りに$\Gamma_1(\xi_1,\eta_1)$, $\Gamma_2(\xi_2,\eta_2)$, …, $\Gamma_{n-2}(\xi_{n-2},\eta_{n-2})$ とする．それぞれの三角形の面積を $S_1, S_2, \cdots, S_{n-2}$ とすると，この場合，質量が面積に比例することから，全体のn角形の重心$\mathrm{G}(\mathrm{G}_x, \mathrm{G}_y)$ は，

$$\mathrm{G}_x = \frac{S_1\xi_1+S_2\xi_2+\cdots+S_{n-2}\xi_{n-2}}{S_1+S_2+\cdots+S_{n-2}} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\mathrm{G}_y = \frac{S_1\eta_1+S_2\eta_2+\cdots+S_{n-2}\eta_{n-2}}{S_1+S_2+\cdots+S_{n-2}} \quad \cdots\cdots (2)$$

となる．ここで，実際の計算では，三角形の頂点の 3 つの座標から，その三角形板の重心や面積を計算する必要がある．一様な三角形板の重心座標は 3 つの頂点の座標の相加平均で与えられることが知られている．したがって 3 点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$, $P_{i+2}(x_{i+2}, y_{i+2})$を頂点とする，$i$ 番目の三角形の重心$\Gamma_i(\xi_i,\eta_i)$については，

$$\xi_i = \frac{x_1+x_{i+1}+x_{i+2}}{3}, \quad \eta_i = \frac{y_1+y_{i+1}+y_{i+2}}{3} \quad \cdots\cdots (3)$$

となる．

また，三角形の面積は 3 辺の長さからヘロンの公式を用いてもよいし，3 頂点からつくる 2 つのベクトルの外積を元に計算することもできる．ここでは，凸でない多角形にも適用できるように負の値となる面積も利用するためベクトルの外積を用いて計算することにした．このため，頂点を順に左回りに指定することに大きな意味がでてくる．

$P_1(x_1, y_1)$, $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$, $P_{i+2}(x_{i+2}, y_{i+2})$を頂点とする，$i$ 番目の三角形の面積S_iについては，

$$S_i = \frac{1}{2}\{(x_{i+1}-x_1)(y_{i+2}-y_1)-(y_{i+1}-y_1)(x_{i+2}-x_1)\} \quad \cdots\cdots (4)$$

によって計算できる．

表 1　プログラムリスト

```
/* 2次元多角形の頂点の座標を左回りに指定して重心を求める．    */
#include <stdio.h>

/* 2次元座標を格納する構造体 */
typedef struct{
        double x;
        double y;
}Point;

/*  三角形の面積を計算する関数 */
double area(Point   a, Point   b, Point   c)
{
   return ((b.x - a.x )*(c.y - a.y) - (b.y - a.y)*(c.x - a.x))/2.0 ;
}

int main(void)
{

        Point   p1,p2,p3; /*  部分三角形の頂点座標*/
        double s=0; /*部分三角形の面積*/
        double ss=0; /*  多角形の面積*/
        Point gs; /*  多角形の重心と面積の積*/
        int j,n;

         gs.x=0,gs.y=0;
        n=2;

          /*  多角形の頂点座標の入力と重心の計算 */
      if ( (j = scanf("%lf%lf",   &p1.x, &p1.y))!=EOF){
            if ( (j = scanf("%lf%lf",   &p2.x, &p2.y))!=EOF) {
              while((j = scanf("%lf%lf",   &p3.x, &p3.y))!=EOF){
                  s=area(p1, p2, p3);
                  gs.x   +=   s*(p1.x + p2.x + p3.x)/3.0;
                  gs.y   +=   s*(p1.y + p2.y + p3.y)/3.0;
                  ss   +=   s;
                  p2=p3;
                  n++;
              }
              if ( n>2 )
                  printf("¥n%d角形の重心:(%.2f , %.2f)¥n",
                    n,   gs.x/ss,   gs.y/ss);
           }
      }
      return 0;
}
```

2.2　C 言語プログラムのリストと動作について

一様なn角形の重心を求める処理を行うための C 言語で作成したプログラムリストを表 1 に示す．なお，多角形のデータは，頂点の 2 次元座標の列で与えられることを前提として作成した．

プログラムリストの概略を説明する．まず構造体の宣言部分では，多角形の頂点の 2 次元の座標データを格納する Point という名前の構造体を準備する．その下は，area( ) という関数の定義であり，3 つの頂点のデータから三角形の面積を計算する部分である．面積を求める関数の中の 2.0 で割っている部分は重心を求める計算には無関係であるので省いてもよいが，三角形の面積の公式をそのまま用いるためにつけている．関数 main ( ) の中で，実際の主たる手続きが行われる．まず，変数の宣言部に続き，頂点の座標を読み取りながら，部分三角形の面積と重心を積算する処理が繰り返され，入力データが最後になると積算された値を元に全体の重心の座標が出力される．なお，データは頂点の数だけ配列を準備する方法もあったが，部分に分けた三角形の頂点だけを格納する 3 変数だけでも作ることができる．これにより頂点の数に依存しないプログラムが作成できた．

(1)　凸な多角形データ入力例

プログラム動作を見るために，図 2 と表 2 に，凸な多角形とその頂点データを入力したときの出力について示す．なお，この結果が別の方法で求めた値と同じであることを確認している．

(2)　凸でない多角形データ入力例

図 3 と表 3 に，凸でない多角形とその頂点データを入力したときの出力について示す．

凸でない多角形の場合の計算がどのように行われるかに

ついて，図 4 を用いて説明する．プログラムには表 4 上のような頂点データが入力される．三角形 $P_1P_2P_3$ は正の値の面積として計算されるが，それに続く，三角形 $P_1P_3P_4$ の面積は負の値となり重心と共に積算される．更に，正の面積となる次の三角形 $P_1P_4P_5$ を重心と共に積算させることにより余計な部分や引きすぎた部分が調整され，全体として部分に分けた三角形の重心の面積による加重平均をとる計算がなされ全体の多角形の重心が求められる．

このように凸でない多角形のデータが与えられると途中の計算で，負の面積が出てくる場合があるが，最終的に正の部分と負の部分が足し合わされることにより全体の重心が計算できる．

具体的な頂点のデータから，プログラム動作途中の計算値を表示させることで面積の値を求めたのが表 4 下である．部分に分けた三角形の面積と重心を加重平均することで全体の重心が計算されていることがわかる．

なお，図 4 における頂点 P_1 の位置でなく P_3 の位置から頂点の指定を開始すると，図 5 のように頂点の指定を変えることができる．この場合，部分に分けた三角形の面積はすべて正となるし，全体の重心も図 4 の頂点 P_1 から指定を始めた場合と一致する．今回作成したプログラムでは，頂点の指定の開始位置に無関係に重心位置が求められる．

(3)　多角形から多角形を切り抜いた図形データ入力例

作成したプログラムの応用例として穴が空いた図形への適用を述べる．図 6 に示すように多角形から多角形を切り抜いた図形の場合，途中に切れ込みを入れる形で表 5 のようなデータを作成することにより，全体の重心を求めることができることが示される．図形の一部に切断を入れる操作は，全体の重心の位置を変化させない．ただし，内部を切り抜いた図形に切断を入れた後の頂点の指定順序に左回りの原則を当てはめると，穴の中は見かけ上頂点の指定が右回りとなる．これを逆にするとうまくいかないので注意が必要である．

3.　物理の教材への応用と，効果について

3.1　　多角形の重心を求める物理課題の提示

これまで何度か一様な多角形板の重心を数値計算で求める課題を学生に課してきた．課題の図形は自分で自由に描かせる場合もあれば，こちらから指定した場合もある．

2013 年度から 2015 年度までは主に家庭学習課題とし，自分で自由に作図した図形を厚紙にコピーさせ，実験的に求めた重心と計算で求めた重心の位置が一致するかどうかを確認させた．

2016 年度と 2017 年度は全員少しずつ違っているが教師側が指定した図形の重心を計算で求めさせるのみの課題を課した．クラス人数分の課題の多角形頂点データおよび多角形の図は，表計算ソフトで作成した．また，重心データ

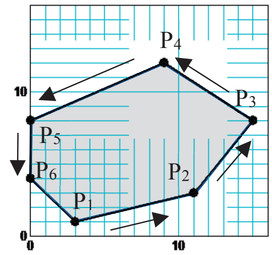


図 2 凸な多角形の例

表 2 頂点のデータと実行結果

	x	y
P1	3	1
P2	11	3
P3	15	8
P4	9	12
P5	0	8
P6	0	4
6 角形の重心:(6.85 , 6.39)		

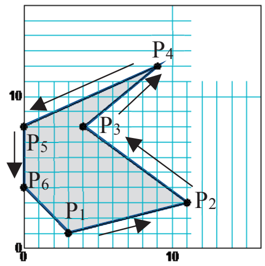


図 3　凸でない多角形の例

表 3　頂点のデータと実行結果

	x	y
P1	3	1
P2	11	3
P3	4	8
P4	9	12
P5	0	8
P6	0	4
6 角形の重心:(4.28 ,5.24)		

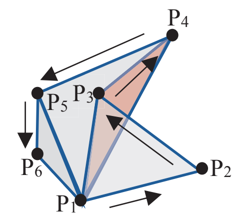


図 4　凸でない多角形を部分に分けた三角形の重なり

表 4　頂点のデータと部分に分けた三角形の面積・重心

	x	y
P1	3	1
P2	11	3
P3	4	8
P4	9	12
P5	0	8
P6	0	4
面積		重心
$S(P_1P_2P_3)$=27.0 , (6.00, 6.00)		
$S(P_1P_3P_4)$=-15.5 ,(5.33, 5.33)		
$S(P_1P_4P_5)$=37.5 , (4.00, 4.00)		
$S(P_1P_5P_6)$=6.0 , (1.00, 1.00)		
6 角形の重心:(4.28, 5.24)		

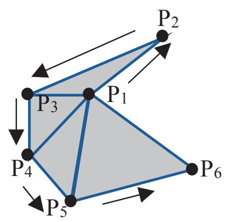


図 5　凸でない多角形を部分に分けた三角形

表 5　頂点のデータと実行結果

	x	y
P1	3	1
P2	11	3
P3	15	8
P4	10	7
P5	6	5
P6	4	8
P7	10	7
P8	15	8
P9	9	12
P10	0	8
P11	0	4
11 角形の重心:(6.86, 6.36)		

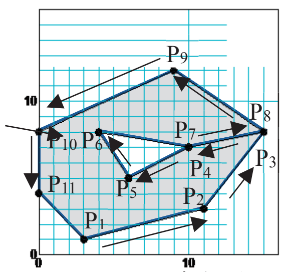


図 6　凸でない多角形の例の応用，多角形から多角形を切り抜いた図形

の正解を求めるため，今回用いたプログラムを使った．

2016 年度は家庭学習課題として提出させた．答えが間違っている場合は減点するようにした．2017 年度は，授業の中でグループ学習課題の形で電卓を使って計算させた．答えが違った者には計算の間違いを自分で見つけさせ，最終的に全員が答えが合うまで再計算させた．早く正解した学生が他の学生に教えるよう促すことで一定の教育効果が見込まれた．

3.2　課題の実施方法と重心を解く問題の正答率比較

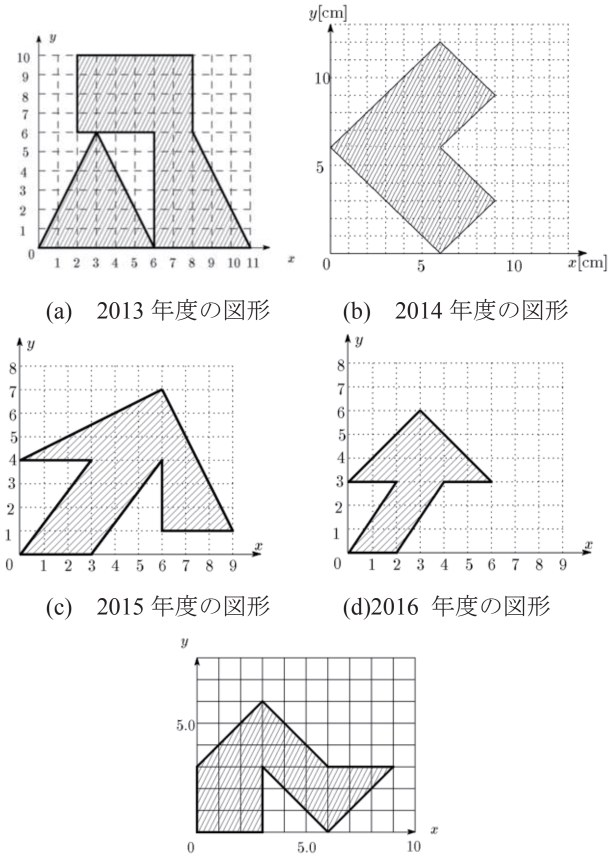
これまで，一様な多角形板の重心の位置を求める問題は課題演習の後，定期試験でも出題してきた．図 7 に，年度毎の問題に使用した図形を示す．図 7 よりそれぞれ，難易度も違うことがわかる．更に採点基準や部分点も違い，平均点などでの比較は難しい．単純に比較するため，完全に正解の割合と全く不正解の割合をそれぞれ年度ごとに比較したのが表 6 である．

表 6 のデータを見ると 2013 年度から 2016 年度は，試験での正答率はそれほど高くなかったことがわかる．2017 年度は，完全な正解の割合が最も高くかつ全く不正解の割合も 2016 年度と比べても低いことがわかる．この違いの原因を，試験前の課題の取り組ませ方に帰してみると，2017 年度は授業中にグループ学習で取り組ませたことや正解するまで何度も計算させたことが挙げられる．2017 年度は試験でも電卓の使用を認めたことも大きく影響しているであろう．電卓の使用に習熟させる意味も含め，授業中に他の学生と情報交換しながら課題を遂行することに効果がある事が示されたといえる．また，全員答えが違う問題に取り組ませて，授業中に全員正解するように促したことも効果があったと推測される．

4.　まとめ

一様な多角形板の重心を頂点の座標から計算するための，頂点の数に依存しない比較的簡単かつ短いプログラムコードを作成した．今回は C 言語のプログラムソースファイルという形で提示したが，これを利用するには C 言語の処理系が必要であり，あまり一般的ではないかもしれない．しかし，解説で述べた式を元に頂点の座標から，多角形の重心を求める計算を表計算ソフトや他の処理系で行うことはそれほど難しいことではない．

このプログラムを用いクラスの学生全員に違う重心問題を課した場合の解答を比較的簡単に計算でき，教員の負担軽減ができた．また全員の答えが違う課題を用いて授業中の演習の時間に正解するまで取り組ませることは教育効果の面でも有効であると思われる．



(a)　2013 年度の図形　(b)　2014 年度の図形

(c)　2015 年度の図形　(d)2016 年度の図形

(e) 2017 年度の図形

図 7　重心を求める問題として出題した図形

表 6　重心の問題の正答率，不正答率

年度	2013	2014	2015	2016	2017
完全に正解の割合（%）	53.7	56.1	63.1	56.8	72.3
全く不正解の割合（%）	1.5	10.6	14.6	16.0	6.2

（平成 29 年 9 月 25 日受付）
（平成 29 年 12 月 6 日受理）

参考文献

(1)　原　康夫：基礎物理学第 4 版, pp.88-89 (2012).
(2)　埼玉工業大学工学部機械工学科小西克享研究室：「Excel による多角形の重心（図心）計算」https://www.sit.ac.jp/user/konishi/JPN/Freeware/PolygonSIT/PolygonSIT.html.
(3)　Noocyte：「多角形の面積，重心(図心)，断面Ｎ次モーメントの公式と，向き (頂点列の回転方向) の判別方法」, http://www5d.biglobe.ne.jp/~noocyte/Program ming/Geometry/PolygonMoment-jp.html#XL.
(4)　「多角形の面積、多角形の重心」, http://geom.web.fc2.com/geometry/polygon/area.html.