

# 放物運動の最大到達距離を与える仰角を簡単に導く方法

工藤 友裕\* 原 憲昭\*\*

下田 道成\*\*\*

## Simplified method for leading an angle of projection with furthest hitting point of free falls

Tomohiro Kudo\*, Noriaki Hara\*\*, Michinari Shimoda\*\*\*

In this paper, another method for leading an angle of projection with furthest hitting point of free falls is shown. It would be usually shown in algebraically by differential of formula explaining a horizontal displacement. We show that, it can be calculated by a law of energy conservation and geometric analogy only. It may be useful for understanding of free falls in elementary physics.

キーワード：自由落下，最大到達距離を与える仰角，エネルギー保存則，初等物理

Keywords：free fall, angle of projection with furthest hitting point, law of energy conservation, elementary physics

### 1. まえがき

一様な重力のはたらく場所での物体の投射運動は，初等物理の基礎的な問題として今でも学習課題に取り上げられている。<sup>(1)</sup> 水平面から物体を投射した後，同じ高さの水平面に落ちてきた点を水平到達点，そこまでの距離を水平到達距離と言う。空気の摩擦等を見捨てる場合で，初速度の大きさが同じなら仰角 $45^\circ$  ( $\pi/4$ [rad]) で投射したときが最大の水平到達距離となる事はよく知られた事実で次の様に容易に導ける。<sup>(1)</sup>

物体の初速度の大きさを  $v_0$ ，仰角を  $\theta$ ，重力加速度を  $g$  とし，物体を投射する。投射後は重力のみが作用するとして，鉛直方向は下向き加速度  $g$  の等加速度運動，水平方向は初速度の水平成分のままの等速運動となる。水平方向，鉛直方向を  $x, y$  方向とする。投射時からの経過時間  $t$  の時の速度  $\vec{v}$  および投射点を原点とした位置  $\vec{r}$  の成分表示は

$$\vec{v} = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta - gt) \dots\dots\dots (1)$$

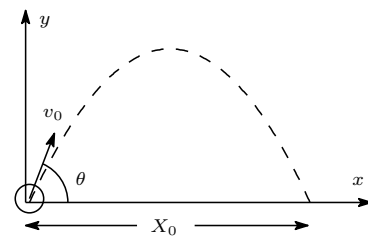


図1

$$\vec{r} = (v_0 \cos \theta \cdot t, v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2) \dots\dots\dots (2)$$

となる。同一水平面に落下するときまでの時間を  $t_0$ ，水平到達点距離を  $X_0$  とすると (2) 式より，

$$v_0 \sin \theta \cdot t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\therefore t_0 = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \dots\dots\dots (4)$$

$$X_0 = v_0 \cos \theta \cdot t_0 = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \dots\dots\dots (5)$$

と表される。

(5) 式の  $\theta$  依存性から明らかな様に  $X_0$  は  $\theta = \pi/4$ [rad] の時に最大値  $\hat{X}_0 = \frac{v_0^2}{g}$  となる。

さて，投射点が落下点より高い位置にある場合の到達点までの水平距離を最大とする仰角を求めるのは次節に示す様に微分を使う方法が一般的であり，案外面倒な計算が必

\* 共通教育科  
〒861-1102 熊本県合志市須屋2659-2  
Faculty of Liberal Studies, 2659-2, Suya, Koshi, Kumamoto 861-1102  
\*\* 熊本高等専門学校名誉教授  
〒860-0862 熊本市中央区黒髪2丁目21-17  
Professor Emeritus of Kumamoto National College of Technology  
2-21-17, Kurokami, Chuou-ku, Kumamoto City, Kumamoto, 860-0862  
\*\*\* 情報通信エレクトロニクス工学科  
〒861-1102 熊本県合志市須屋2659-2  
Department of Information, Communication and Electronic Engineering, 2659-2, Suya, Koshi, Kumamoto 861-1102

要である。

今回報告するのは著者の一人が見出し、他の著者と共に検証した、微分計算を用いずにこの仰角を表す関係式を導く方法である。この方法はとても簡単である事から、既に遠い昔からわかっていた事である可能性もあるが、あまり一般的ではないので初等物理関連の文献等には見当たらない。

この方法で用いるのは力学的エネルギー保存則と、投射運動の基本的な関係式のみである。これらの関係式と速度ベクトルの図に現れる三角形の面積との関連から直感的に仰角の関係式を見積もる事が可能である事を示す。

## 2. 微分を用いた最大到達距離を与える仰角の計算

問題を再び次の図2の様に定式化する。投射点の高さを  $h$ 、初速度の大きさを  $v_0$ 、重力加速度を  $g$  とする。落下点までの水平到達距離を最大とする仰角を求めるという問題である。

仰角を  $\theta$  [rad]、投射後、落下点に達するまでの時間  $t_1$  およびそこまでの水平距離を  $X$  とすると、投射運動の関係式 (2) から

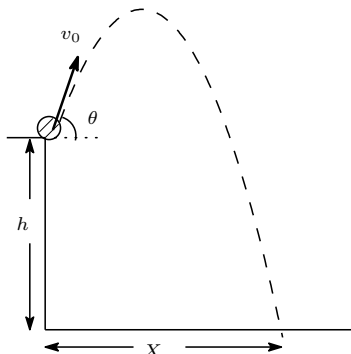


図2

$$-\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0 \sin \theta \cdot t_1 + h = 0 \quad (6)$$

$$\therefore t_1 = \frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g} \quad (7)$$

$$X = v_0 \cos \theta \cdot t_1 = \frac{v_0^2 \cos \theta}{g} \left( \sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{2gh}{v_0^2}} \right) \quad (8)$$

となる。この式は (5) 式に比べると複雑である。これより、 $X$  を最大とするような  $\theta$  を (8) 式を元にして導く事となる。以後この最大の距離を最大到達距離と呼ぶ事とする。

式の変形を簡単にするため、次の様に変数を変え、

$$K \equiv \frac{2gh}{v_0^2} \quad (9)$$

$$X' \equiv \frac{g}{v_0^2} X = \cos \theta \left( \sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + K} \right) \quad (10)$$

として、(10) 式を  $\theta$  で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dX'}{d\theta} &= -\sin \theta \left( \sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + K} \right) \\ &+ \cos \theta \left( \cos \theta + \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + K}} \right) \\ &= \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\sqrt{\sin^2 \theta + K} + \sin \theta) - K \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + K}} \\ &= \frac{(1 - 2\sin^2 \theta) (\sqrt{\sin^2 \theta + K} + \sin \theta) - K \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + K}} \quad \dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。ここで  $X'$  を最大とする  $\theta$  を求めるため (11) 式の右辺を0とおいて  $\theta$  について解くのであるが、次の様に

$$\xi \equiv \sin \theta \quad (12)$$

と置き、(11) 式の分母は0にならない領域を考えるとして解くべき方程式を

$$(1 - 2\xi^2) (\sqrt{\xi^2 + K} + \xi) - K\xi = 0 \quad (13)$$

とする。これを  $\xi$  について解くために (13) 式を次の様に変形していく、

$$(1 - 2\xi^2) (\xi^2 + K - \xi^2) = K\xi (\sqrt{\xi^2 + K} - \xi) \quad (14)$$

$$\therefore 1 - 2\xi^2 = \xi \sqrt{\xi^2 + K} - \xi^2$$

$$\therefore (1 - \xi^2)^2 = \xi^2 (\xi^2 + K)$$

$$\therefore 1 - (2 + K)\xi^2 = 0$$

$$\therefore \xi^2 = \frac{1}{2 + K} \quad (15)$$

となる。 $\xi$  を元に戻すと、

$$\xi^2 = \sin^2 \theta = \frac{1}{2 + K} \quad (16)$$

となる。これを満たす  $\theta$  を  $\hat{\theta}$  とする。

$$\sin^2 \hat{\theta} = \frac{1}{2 + K} \quad (17)$$

であるので、

$$\cos^2 \hat{\theta} = 1 - \sin^2 \hat{\theta} = 1 - \frac{1}{2 + K} = \frac{1 + K}{2 + K} \quad (18)$$

$$\tan^2 \hat{\theta} = \frac{\sin^2 \hat{\theta}}{\cos^2 \hat{\theta}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2 + K}}{\frac{1 + K}{2 + K}} = \frac{1}{1 + K} \quad (19)$$

である。最後に  $K$  を元にもどすと、

$$\tan \hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}} \quad (20)$$

となる。つまり最大到達距離を与える仰角  $\hat{\theta}$  は

$$\hat{\theta} = \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}} \right) \quad (21)$$

である事が示された。

(21) 式において  $h \rightarrow 0$  とすると、 $\hat{\theta} \rightarrow \pi/4$  [rad] となる事もわかる。

また、このときの最大到達距離  $\hat{X}$  を求めてみると次の様

になる.

(8), (12), (17), (18) 式, および  $0 \leq K$  として

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \frac{v_0^2}{g} \sqrt{\frac{1+K}{2+K}} \left( \sqrt{\frac{1}{2+K}} + \sqrt{\frac{1}{2+K} + K} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} \sqrt{\frac{1+K}{2+K}} \left( \sqrt{\frac{1}{2+K}} + \sqrt{\frac{(1+K)^2}{2+K}} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1+K} \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

となり, 再びここで  $K$  を元に戻すと

$$\hat{X} = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}} = \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} \dots\dots\dots (23)$$

となる.

### 3. 微分を用いない方法

次に, 微分を用いないで, 力学的エネルギー保存則と, 投射点での速さ, 落下点での速さを用いた解析方法を示す.

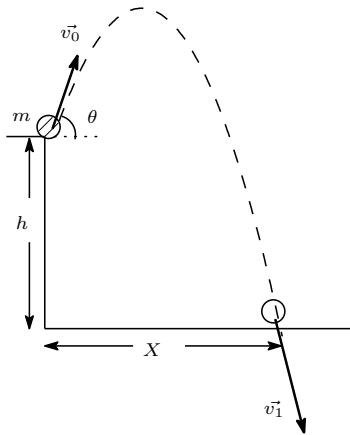


図3

図3の様に問題の定式化に, 物体の質量  $m$ , 落下点での物体の速さ  $v_1$  を付け加える. 投射後, 落下点に達するまでの時間は前と同じく  $t_1$  とする. このとき, 投射点と落下点での力学的エネルギー保存則を用いると,

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_1^2 \dots\dots\dots (24)$$

が成り立つ. これより,

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \dots\dots\dots (25)$$

となる. 落下点での速さ  $v_1$  は投射時の仰角  $\theta$  に無関係である.

また, 水平, 鉛直方向をそれぞれ  $x, y$  方向としたとき, 初速度  $\vec{v}_0$  と, 落下点での速度  $\vec{v}_1$  の成分表示は放物運動の関係式よりそれぞれ

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta) \dots\dots\dots (26)$$

$$\vec{v}_1 = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta - gt_1) \dots\dots\dots (27)$$

となる. 以上より, いろいろな仰角  $\theta$  の時の投射時の初速度  $\vec{v}_0$  と落下点での速度  $\vec{v}_1$  のベクトル図を書くと図4の様になる.

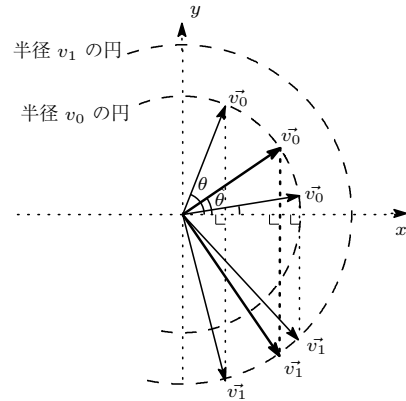


図4

投射運動の性質から初速度と落下点での速度の水平成分は合等しい.

ここで, ある仰角  $\theta$  の場合の速度ベクトルを取り出し, 図5に示す.

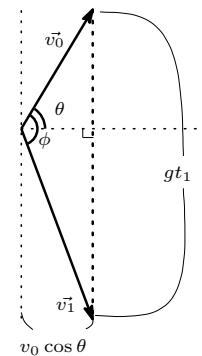


図5

(26) および (27) 式より, 図5に示す  $\vec{v}_0$  と  $\vec{v}_1$  の先端を結んだ長さ  $|\vec{v}_0 - \vec{v}_1|$  は

$$|\vec{v}_0 - \vec{v}_1| = v_0 \sin \theta - (v_0 \sin \theta - gt_1) = gt_1 \dots\dots\dots (28)$$

である. 図5の2つの速度ベクトルで囲まれた三角形の面積を  $S$  とすると, 底辺の長さが  $gt_1$ , 高さが  $v_0 \cos \theta$  であるので, (8) 式と併せて,

$$S = \frac{1}{2} v_0 \cos \theta \cdot gt_1 = \frac{1}{2} gX \dots\dots\dots (29)$$

となる. 即ち,  $S$  が最大なら水平到達距離  $X$  も最大になる. ここで2つの速度ベクトルの間の角を  $\phi$  とすると,  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} v_0 \cdot v_1 \cdot \sin \phi \dots\dots\dots (30)$$

と表す事ができる.

故に  $v_0, v_1$  を固定すると  $S$  が最大になるのは  $\phi = \pi/2$  [rad]

の時である。この時の速度ベクトルを図6に示す。

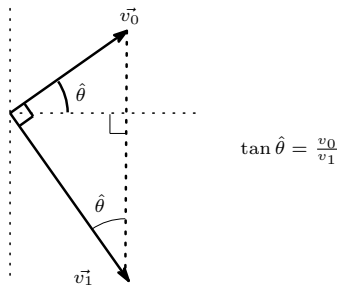


図6

図6より、最大到達距離を与える仰角  $\hat{\theta}$  と速度ベクトル  $\vec{v}_0$  および  $\vec{v}_1$  は

$$\tan \hat{\theta} = \frac{v_0}{v_1} \dots\dots\dots (31)$$

という関係を満たしている。この (31) 式が求めようとしていた仰角の表現の一つである。この表現は、初速度と落下点速度というわかりやすい量を用いており、かつ、大変シンプルな表現となっているので記憶するのも適している。

また、(25), (29) (30) 式からその時の最大到達距離  $\hat{X}$  は  $\phi = \pi/2$  として、

$$\hat{X} = \frac{v_0 \cdot v_1}{g} = \frac{v_0 \cdot \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} \dots\dots\dots (32)$$

と、(22) の計算に比べ、より簡単な計算で求められる事もわかる。

ここで、(25) 式を用いて (31) 式を  $v_0, g, h$  で書き換えると、

$$\begin{aligned} \tan \hat{\theta} &= \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}} \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

となり、当然の事ながら先に求めた関係式 (20) と同じである。以上のようにして微分演算を用いずに最大到達距離となる仰角  $\hat{\theta}$  を表す関係式が得られた。

#### 4. むすび

投射運動における物体の速度ベクトルを図示し、水平到達距離が図中の三角形の面積に比例する事を用いて最大到達距離を与える仰角を求める方法を示した。微分を用いず、2つの辺の長さが与えられたとき、その間の角度が直角の時に三角形の面積が最大となるという直感的にわかりやすい事を用いているので、理解しやすい説明になると期待できる。

なお、この速度ベクトルの図示による説明は、当然、落下点が投射点と同じ高さの場合、つまり水平到達距離の最大を求める場合においても用いる事ができる。その場合にも、理解を助ける説明になるであろう。

ところで、今回用いた速度ベクトル図における初速度と終速度ベクトルで囲まれた三角形の面積を用いる方法は、投射運動以外にも一定加速度の場合の2次元の運動の説明に用いる事が可能である。そのような場合において、初速度と終速度2つのベクトルの差の大きさつまり三角形の底辺の長さにあたるものが経過時間に比例した量（今回の解析では  $gt_1$  に相当）である。そして三角形の高さにあたる量（今回は水平速度成分  $v_0 \cos \theta$  に相当）は加速度の方向に垂直な速度成分である。座標軸の取り方を加速度の方向とそれに垂直な方向に取れば、件の三角形の面積は、一定加速度に垂直な方向への変位（今回は水平到達距離に相当）に比例した量である事がわかる。あえて名前を付けるならこの変位は「等速成分変位」とも言える。ただし、等加速度運動以外にこの面積の概念を拡張すると、何を計算しているのか分からなくなるので注意が必要である。

(平成25年9月6日受付)

(平成25年11月6日受理)

#### 参考文献

- (1) 原康男, “基礎物理学第3版” 学術図書出版社, pp.47-48.