論　文

ピタゴラスの定理の一つの証明法

原　　憲昭*　工藤　友裕**
下田　道成***

Another Method for Proving the Pythagorean Theorem

Noriaki Hara *, Tomohiro Kudo **, Michinari Shimoda ***

In this paper, we describe a new method for proving the Pythagorean theorem. As this method is fulfilled only using by simple elementary geometry, it may be useful of understanding the Pythagorean theorem for beginners.

キーワード：ピタゴラスの定理，証明法，初等幾何学
Keywords：Pythagorean theorem, method for proving, elementary geometry

１．まえがき

数学の定理の中でも，ピタゴラスの定理は最も馴染み深い定理の代表格ではないだろうか。そのために古今東西多数の人々がその証明に取り組み，現在ではその証明法は100種を超しているとも，300種を超しているとも言われている。ここで述べる証明法も，著者の一人があるふとした機会に見出し，他の著者と共に検証したものである。ピタゴラスの定理関連の文献等を調べても同様な証明法は見当たらなかったので，ここに発表する次第である。

２．ユークリッドによるピタゴラスの定理の証明法

ユークリッドによるピタゴラスの定理の最もよく知られた証明法は，『ユークリッド原論』の第1巻命題47に記載されている。以下ユークリッド原論の和訳 (1) から，それを引用する。

直角三角形において直角の対辺の上の正方形は
直角をはさむ2辺の上の正方形の和に等しい。

$AB\Gamma$ を角 $BA\Gamma$ を直角とする直角三角形とせよ。$B\Gamma$ 上の正方形は BA，$A\Gamma$ 上の正方形の和に等しいと主張する。

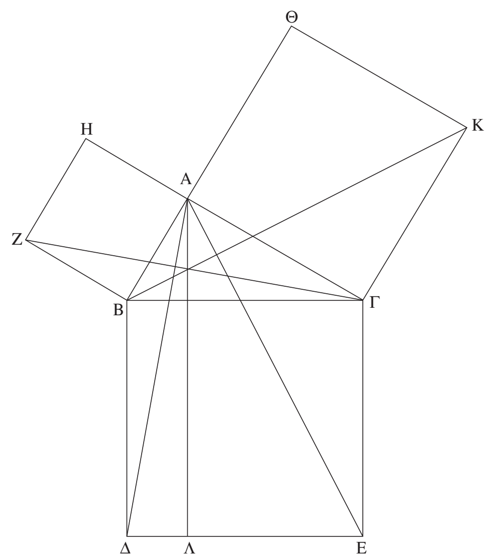

図1　ユークリッドによるピタゴラスの定理の証明

$B\Gamma$ 上に正方形 $B\Delta E\Gamma$ が，BA，$A\Gamma$ 上に正方形 HB，$\Theta\Gamma$ が描かれ，A を通り $B\Delta$，ΓE のどちらかに平行に $A\Lambda$ がひかれたとせよ。そして $A\Delta$，$Z\Gamma$ が結ばれたとせよ。そうすれば角 $BA\Gamma$，BAH の双方は直角であるから，任意の線分 BA に対してその上の点 A において同じ側にない2線分 $A\Gamma$，

*　熊本高等専門学校名誉教授
〒860-0862 熊本市中央区黒髪2丁目21-17
Professor Emeritus of Kumamoto National College of Technology
2-21-17, Kurokami, Chuuou-ku, Kumamoto City, Kumamoto, 860-0862
**　共通教育科
〒861-1102 熊本県合志市須屋2659-2
Faculty of Liberal Studies, 2659-2, Suya, Koshi, Kumamoto, 861-1102
***　情報通信エレクトロニクス工学科
〒861-1102 熊本県合志市須屋2659-2
Department of Information, Communication and Electronic Engineering, 2659-2, Suya, Koshi, Kumamoto 861-1102

AH が接角を2直角に等しくする。それゆえ ΓA は AH と一直線をなす。同じ理由で BA も $A\Theta$ と一直線をなす。そして角 $\Delta B\Gamma$ は角 ZBA に，共に直角であるがゆえに等しいから，双方に角 $AB\Gamma$ が加えられたとせよ。そうすれば角 ΔBA 全体は角 $ZB\Gamma$ 全体に等しい。そして ΔB は $B\Gamma$ に等しく，ZB は BA に等しいから，2辺 ΔB，BA は2辺 ZB，$B\Gamma$ にそれぞれ等しい。そして角 ΔBA は角 $ZB\Gamma$ に等しい。したがって底辺 $A\Delta$ は底辺 $Z\Gamma$ に等しく，三角形 $AB\Delta$ は三角形 $ZB\Gamma$ に等しい。そして平行四辺形 $B\Lambda$ は三角形 $AB\Delta$ の2倍である。なぜならそれらは同じ底辺 $B\Delta$ をもちかつ同じ平行線 $B\Delta$，$A\Lambda$ の間にあるから，そして正方形 HB は三角形 $ZB\Gamma$ の2倍である。なぜならこれらもまた同じ底辺 ZB をもちかつ同じ平行線 ZB，$H\Gamma$ の間にあるから，それゆえ平行四辺形 $B\Lambda$ は正方形 HB に等しい。同様にして AE，BK が結ばれれば，平行四辺形 $\Gamma\Lambda$ が正方形 $\Theta\Gamma$ に等しいことも証明されうる。ゆえに正方形 $B\Delta E\Gamma$ 全体は二つの正方形 HB，$\Theta\Gamma$ の和に等しい。そして正方形 $\mathrm{B}\Delta E\Gamma$ は $B\Gamma$ 上に描かれ，HB，$\Theta\Gamma$ は BA，$A\Gamma$ 上に描かれている。したがって辺 $B\Gamma$ 上の正方形は辺 BA，$A\Gamma$ 上の正方形の和に等しい。

よって直角三角形において直角の対辺の上の正方形は直角をはさむ2辺の上の正方形の和に等しい。これが証明すべきことであった。

３．ピタゴラスの定理の証明法の分類

多数のピタゴラスの定理の証明法が存在するが，証明の方法で大きく分類すると，

- 初等幾何学のみで証明する方法
- 比例関係を利用して証明する方法
- 計算を援用する方法

の3系統に分類できそうである。(2)～(4) 以下，それぞれの系統の代表的な証明法を外観してみる。

3.1 初等幾何学のみで証明する方法

ユークリッドによる証明法はその代表的なものであるが，他の例としては以下のような証明法がある。

図2において

平行四辺形 $BAKI$ = 正方形 $BCHI$ ………………… (1)

平行四辺形 $BDMC$ = 長方形 $BDJN$ ………………… (2)

一方

平行四辺形 $BAKI \equiv$ 平行四辺形 $BDMC$ …………… (3)

ゆえに

正方形 $BCHI$ = 長方形 $BDJN$ ……………………… (4)

同様にして

正方形 $AFGC$ = 長方形 $ANJE$ ……………………… (5)

ゆえに

正方形 $BCHI$ + 正方形 $AFGC$ = 長方形 $BDEA$ …… (6)

したがって

$a^2 + b^2 = c^2$ ………………………………………… (7)

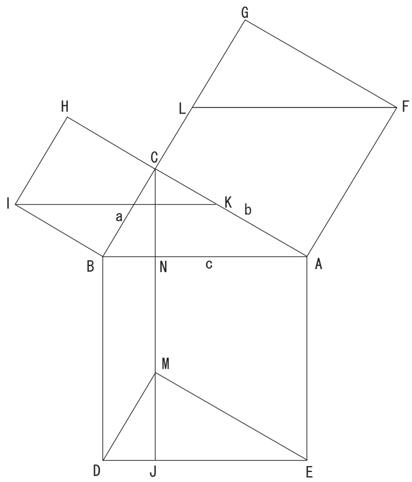

図2　初等幾何学のみで証明する方法

3.2 比例関係を利用して証明する方法

アインシュタインの証明法といわれる，相似三角形の面積比が相似比の2乗に等しいことを利用した以下のような証明法がある。

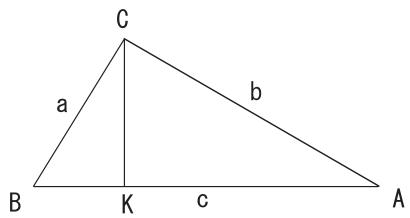

図3　比例関係を利用して証明する方法

図3において三角形 ABC，三角形 CBK，三角形 ACK は相似比 $c:a:b$ の相似三角形である。三角形 ABC，三角形 CBK，三角形 ACK のそれぞれの面積を $S1$，$S2$，$S3$ とすると

$$\frac{S2}{S1} = \frac{a^2}{c^2} \quad (8)$$

$$\frac{S3}{S1} = \frac{b^2}{c^2} \quad (9)$$

一方

$S2 + S3 = S1$ ………………………………………… (10)

ゆえに

$$\frac{a^2}{c^2}S1+\frac{b^2}{c^2}S1=S1 \quad \cdots\cdots (11)$$

したがって

$$a^2+b^2=c^2 \quad \cdots\cdots (12)$$

3.3 計算を援用する方法

アメリカ合衆国の第20代大統領 Garfield の証明法として知られている以下のような証明法がある。

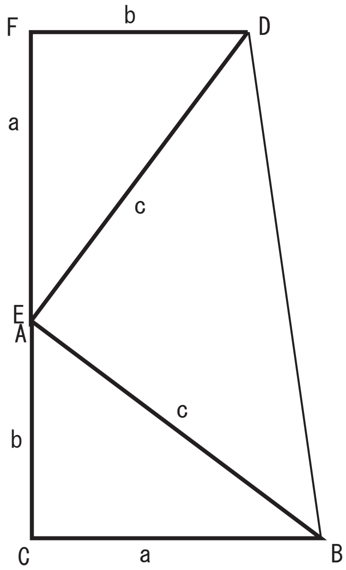

図4　計算を援用する方法

図4において三角形 DEF は三角形 ABC と合同な直角三角形である。

台形 $FCBD$ の面積は，上底が b，下底が a，高さが $a+b$ だから $(a+b)^2/2$ である。

一方，台形 $FCBD$ は三角形 ABC，三角形 DEF，三角形 DEB で構成されているからその面積は $(ab)/2+(ab)/2+c^2/2$ である。

ゆえに

$$\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{c^2}{2} \quad \cdots\cdots (13)$$

したがって

$$a^2+b^2=c^2 \quad \cdots\cdots (14)$$

4．新しい証明法

4.1 直角を挟む2 辺の長さが異なる場合

直角三角形 ABC において，直角 $\angle BCA$ を挟む2辺，BC，CA の長さを a，b とする。また，斜辺 AB の長さを c とする。$a>b$ としても一般性は失わないので，ここでは $a>b$ とする。（図5）

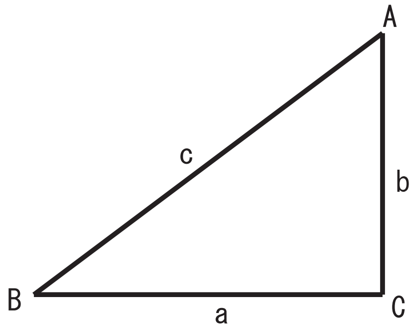

図5　新しい証明法（その0）

直角三角形 ABC の直角を挟む2辺 BC，AC をそれぞれ1辺とする正方形 $BDEC$，正方形 $ACFG$ を図のように描く。それぞれの正方形の面積は a^2，b^2である。

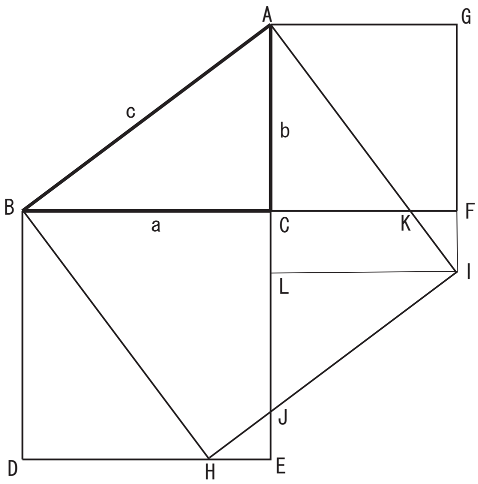

図6　新しい証明法（その1）

B を通って，直線 BA に垂直な直線と DE との交点を H とする。また，A を通って，直線 AB に垂直な直線と GF の延長との交点を I とする。直線 CE と直線 HI との交点を J，直線 CF と直線 AI との交点を K とする。さらに，点 I から直線 CE に下ろした垂線の足を L とする。

$\triangle ABC$ と $\triangle HBD$ において

$$BC=BD \quad \cdots\cdots (15)$$

$$\angle ABC=\angle R-\angle CBH=\angle HBD \quad \cdots\cdots (16)$$

$$\angle ACB=\angle HDB=\angle R \quad \cdots\cdots (17)$$

ゆえに

$$\triangle ABC \equiv \triangle HBD \quad \cdots\cdots (18)$$

それゆえ

$HB = AB$ ……………………………………………（19）

同様に△ABC と△AIG において

$AC = AG$ ………………………（20）

$\angle CAB = \angle R - \angle CAI = \angle GAI$ ………………………（21）

$\angle ACB = \angle AGI = \angle R$ ………………………（22）

ゆえに

$\triangle ABC \equiv \triangle AIG$ ………………………………（23）

それゆえ

$AI = AB$ ……………………………………………（24）

式（19）と式（24）から四辺形 $ABHI$ は，辺 AB を1辺とする正方形であり，その面積は c^2である。

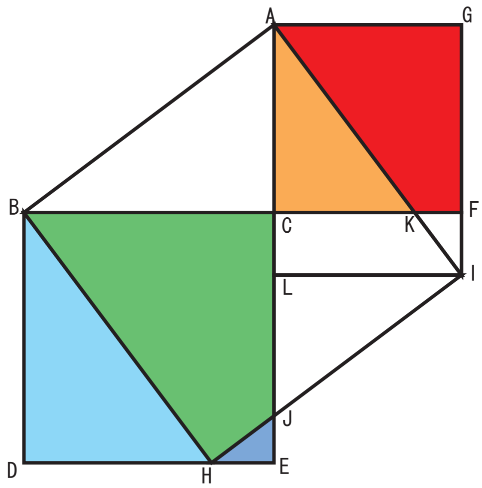

図7　新しい証明法（その2）

図7に示すように，正方形 $BDEC$ を構成する三角形 HBD，三角形 JHE，四辺形 $CBHJ$ にチェックを入れる。同様に正方形 $ACFG$ を構成する三角形 ACK，四辺形 $AKFG$ にもチェックをいれる。

チェックを入れられた図形で正方形 $ABHI$ が過不足なく埋めつくされれば，定理が証明されたことになる。

△JHE と△KIF において

式（18）から $HD = b$ だから

$HE = a - b$ ……………………………………………（25）

式（23）から $IG = a$ だから

$IF = a - b$ ……………………………………………（26）

式（25）と式（26）から

$HE = IF$ ……………………………………………（27）

$\angle JHE = \angle R - \angle HJE = \angle R - \angle IJA$
$= \angle JAI = \angle KIF$ ………………………………（28）

$\angle JEH = \angle KFI = \angle R$ ………………………………（29）

ゆえに

$\triangle JHE \equiv \triangle KIF$ ………………………………………（30）

それゆえ三角形 JHE のチェックを三角形 KIF に移すことができる。（図8）

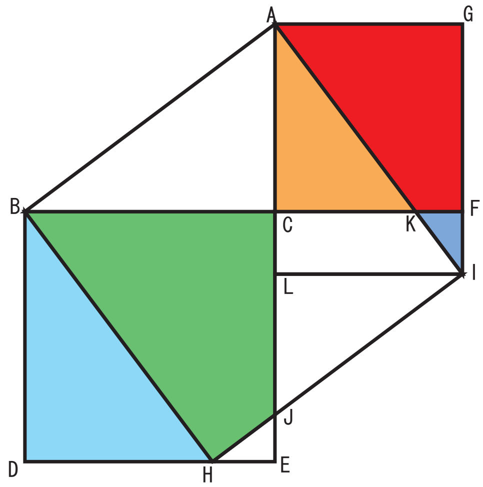

図8　新しい証明法（その3）

△ACK と△ILJ において

$AC = FC = IL$ ………………………（31）

$\angle KAC = \angle R - \angle AIL = \angle JIL$ ………………………（32）

$\angle ACK = \angle ILJ = \angle R$ ………………………（33）

ゆえに

$\triangle ACK \equiv \triangle ILJ$ ………………………………………（34）

それゆえ三角形 ACK のチェックを三角形 ILJ に移すことができる。（図9）

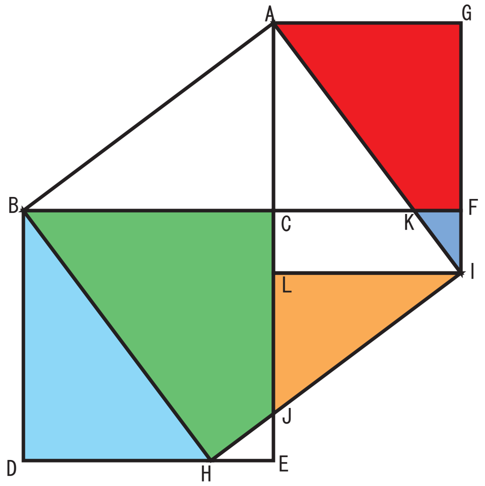

図9　新しい証明法（その4）

$\triangle IGA$ と $\triangle ALI$ において

$$IG = AL \quad \cdots\cdots (35)$$

$$\angle GIA = \angle LAI \quad \cdots\cdots (36)$$

$$\angle IGA = \angle ALI = \angle R \quad \cdots\cdots (37)$$

ゆえに

$$\triangle IGA \equiv \triangle ALI \quad \cdots\cdots (38)$$

それゆえ三角形 IGA のチェックを三角形 ALI に移すことができる。（図10）

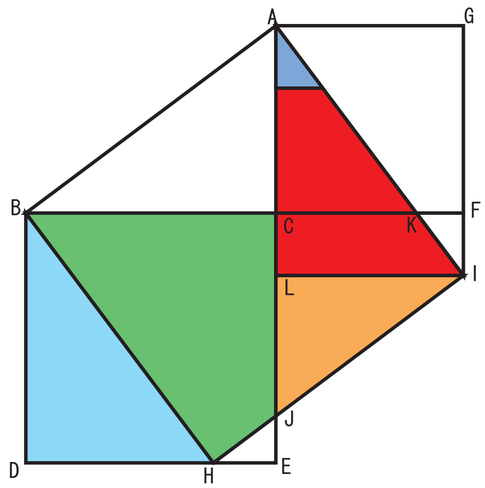

図10　新しい証明法（その5）

式（18）だから三角形 HBD のチェックを三角形 ABC に移すことができる。（図11）

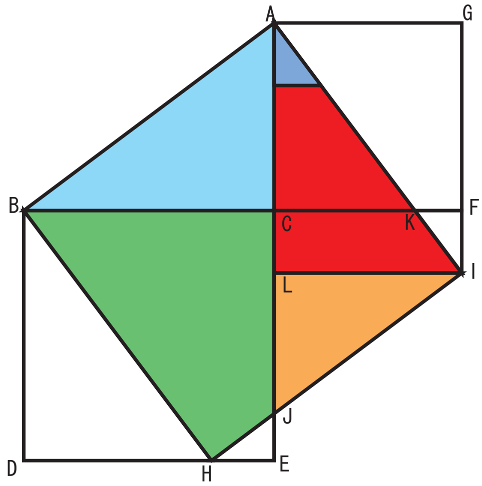

図11　新しい証明法（その6）

したがって正方形 $BDEC$ + 正方形 $ACFG$ = 正方形 $ABHI$，すなわち直角を挟む2辺の長さが異なる場合について $a^2 + b^2 = c^2$ が証明できた。

4. 2 直角を挟む2辺の長さが等しい場合

直角三角形 ABC の直角 $\angle BCA$ を挟む2辺，BC，CA の長さが等しい場合，すなわち $a = b$ の場合を考える。（図12）

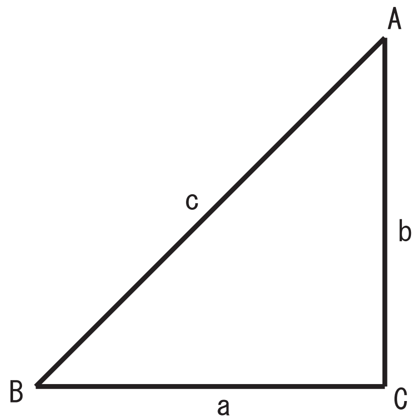

図12　新しい証明法（その7）

直角三角形 ABC の直角を挟む2辺 BC，AC をそれぞれ1辺とする正方形 $BDEC$，正方形 $ACFG$ を図13のように描く。それぞれの正方形の面積は a^2，$b^2 = a^2$ である。

前節4.1『直角を挟む2辺の長さが異なる場合』における2点 H と I に相当する点は，『直角を挟む2辺の長さが等しい場合』においては，それぞれ E と F とに重なることが予想される。すなわち斜辺 BA に垂直な2辺は正方形 $BDEC$，正方形 $ACFG$ のそれぞれの対角線 BE と FA となることが想定される。このことを念頭に置いて以下のようにした。

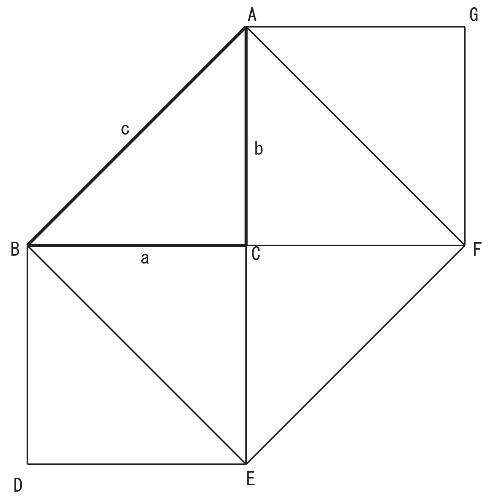

図13　新しい証明法（その8）

B と E を結ぶ。同様に A と F を結ぶ。
△ABC と△BEC において

$$AC = BC \quad \cdots\cdots (39)$$
$$BC = EC \quad \cdots\cdots (40)$$
$$\angle ACB = \angle BCE = \angle R \quad \cdots\cdots (41)$$

ゆえに

$$\triangle ABC \equiv \triangle BEC \quad \cdots\cdots (42)$$

それゆえ

$$BE = AB \quad \cdots\cdots (43)$$

また，△ABC，△BEC は直角二等辺三角形だから

$$\angle ABE = \angle ABC + \angle CAE = \angle R \quad \cdots\cdots (44)$$

同様に△ABC と△FAC において

$$BC = AC \quad \cdots\cdots (45)$$
$$AC = FC \quad \cdots\cdots (46)$$
$$\angle BCA = \angle ACF = \angle R \quad \cdots\cdots (47)$$

ゆえに

$$\triangle ABC \equiv \triangle FAC \quad \cdots\cdots (48)$$

それゆえ

$$FA = AB \quad \cdots\cdots (49)$$

また，△ABC，△FAC は直角二等辺三角形だから

$$\angle FAB = \angle FAC + \angle CAB = \angle R \quad \cdots\cdots (50)$$

式（43），式（49），式（44），式（50）から四辺形 $ABEF$ は，辺 AB を1辺とする正方形であり，その面積は c^2 である。

BE は正方形 $BDEC$ の対角線だから，

$$\triangle BED \equiv \triangle BEC \quad \cdots\cdots (51)$$

また AF は正方形 $ACFG$ の対角線だから，

$$\triangle FGA \equiv \triangle FAC \quad \cdots\cdots (52)$$

一方△FCE は

$$FC = CE = a \quad \cdots\cdots (53)$$
$$\angle FCE = 2\pi\,[rad] - 3\angle R = \angle R \quad \cdots\cdots (54)$$

ゆえに

$$\triangle FCE \equiv \triangle ABC \quad \cdots\cdots (55)$$

式（42），式（48），式（51），式（52）から正方形 $BDEC$，正方形 $ACFG$，正方形 $ABEF$ を構成するすべての三角形は三角形 ABC 合同である。

したがって正方形 $BDEC$ + 正方形 $ACFG$ = 正方形 $ABEF$，すなわち直角を挟む2辺の長さが等しい場合についても $a^2 + b^2 = c^2$ が証明できた。

5．むすび

ピタゴラスの定理を初等幾何学のみで証明する方法のほとんどは面積が等しい，あるいはその2倍，1/2等の他の図形に移し変えて比較する方法を取っている。ユークリッドによる証明法もその一つである。このことが，初心者にとっては，理解しがたい印象を与えているのではないだろうか。

ここで述べたピタゴラスの定理の新しい証明法は，初等幾何学のみで証明する方法であるが，使用する知識は直角三角形の合同条件のみなので，初心者にとっても理解しやすい証明法になっていると思われる。また，図形の変形はいっさい行わないので，鋏で切り離し，貼り合わせることで理解を助けることができるかもしれない。

（平成25年9月3日受付）
（平成25年11月6日受理）

参考文献

（1）訳解説　中村幸四郎，寺坂英孝，伊藤俊太郎，池田美恵，“ユークリッド原論，”共立出版社，pp.33-34.
（2）森下四郎，“ピタゴラスの定理100の証明法　―幾何の散歩道―，”プレアデス出版，pp.152-193.
（3）Roger B. Nelsen，“Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking，” The Mathematical Association of America，pp.3-9.
（4）Roger B. Nelsen，“Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking，” The Mathematical Association of America，pp.3-8.