シンプソン近似の誤差の限界

（平成 16 年 7 月 30 日　受理）

本　　田　　勁 二 郎*[1]
石　　原　　秀　　樹*[2]
堀　　本　　　　　博*[2]
重　　田　　　　　出*[2]

Large The Boundary of Error in the Simpson's Approximation

Keijiro HONDA
Hideki ISHIHARA
Hiroshi HORIMOTO
Iduru SHIGETA

Abstract

In our college, many students use the Simpson's approximation for some kind of calculations.The formula of the Simpson's approximation is leaded in the regular lectures for 3rd-year students in our college.However, the boundary of error is not discussed in anywhere in our college.In this note, we discuss the boundary of error in the Simpson's approximation.We use the Taylor expansion of functions in this note.The 3rd-year students in our college have sufficient knowledge about the Taylor expansion.

1．はじめに

シンプソン近似計算は，例えば卒業研究などで，本校の学生はしばしば利用している。その近似公式の導出については，本科の講義の中でも取り扱われる（3 年次）[1)]。しかし，その近似計算の誤差の限界については，多くの場合限界の公式を与えるだけで，導出が議論される場合は少ない。シンプソン近似計算の誤差の限界は，例えば差分法で導くことが出来る。しかし，それは本

＊1　情報通信工学科
＊2　一般科目

科 3 年次で取り扱われるテーラーの展開（或いは定理）の知識があれば可能である。そこで本論ではテーラー展開を用いて誤差の限界を導くことにする。話の内容は以下の通りである。

2. では，後の話を分かり易くするために，台形公式とシンプソンの公式が簡単に導かれる。これは 3 年次の授業で扱われる内容である。

3. では台形公式とシンプソン近似公式の誤差の限界の式が導かれる。ここではテーラー展開が用いられる。

4. は結びである。

2．台形公式とシンプソンの公式

台形公式やシンプソンの公式の誤差の限界を論じる前に，後の便利の為に台形公式とシンプソンの公式を簡単に導いておく。

2-1 台形公式

区間 $[a, b]$ で連続な関数 $y = f(x)$ がある。いま，区間 $[a, b]$ を n 等分して，その分点を左から小さい順に

$$a = a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n = b \tag{1}$$

とする。いま，k 番目の小区間 $[a_{k-1}, a_k]$ について考える。2 分点 a_{k-1}, a_k，a_k に対応する曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点を A_{k-1}，A_k とすると，小区間 $[a_{k-1}, a_k]$ において曲線 $y=f(x)$ の代わりに A_{k-1} と A_k を結ぶ直線で近似すると次の近似公式が得られる。

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx \fallingdotseq \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_k)h \tag{2}$$

ただし，$h = \dfrac{b-a}{n}$ であり（小区間の幅），y_{k-1}，y_k はそれぞれ 2 点 A_{k-1}，A_k の y 座標である。つまり，$y_i = f(a_i)$ $(i=0, 1, 2, 3, \ldots, n)$ である。これを $k=1$ から $k=n$ まで和を取ると，

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_k)h \\ &= \frac{h}{2}\{y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})\}\end{aligned} \tag{3}$$

が得られる。これが台形公式と呼ばれる近似計算公式である。

2-2　シンプソンの公式

台形公式では 2 点 A_{k-1}，A_k を結ぶ曲線 $y=f(x)$ の代わりに直線で近似を行った。そこで区間 $[a_{k-1}, a_k]$ の中点に対応する曲線上の点を B_k を設け，2 点 A_{k-1}，A_k を結ぶ曲線 $y=f(x)$ の代わりに 3 点 A_{k-1}，B_k，A_k を通る 2 次曲線で近似しようというのがシンプソン近似である。従って，区間 $[a, b]$ を偶数個の小区間に分割していく必要がある。以下に一般的に話を進めていくことにする。

台形公式の場合と同様に，区間 $[a, b]$ で連続な関数 $y=f(x)$ がある。いま，区間 $[a, b]$ を $2n$ 等分して，その分点を左から小さい順に

$$a = a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{2k-2}, a_{2k-1}, a_{2k}, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n} = b \tag{4}$$

とする。そして $h = \dfrac{b-a}{2n}$ とし，各分点 $x=a_i$ における曲線 $y=f(x)$ 上の y 座標を $y_i=f(a_i)$ で表すことにする。

偶数の添字を小区間の分点として，k 番目の小区間 $[a_{2k-2}, a_{2k}]$ について考える。台形公式の場合と同様に，a_{2k-2}，a_{2k-1}，a_{2k} に対応する曲線 $y=f(x)$ 上の点を A_{2k-2}，A_{2k-1}，A_{2k} として，この 3 点を通る 2 次曲線を

$$y = A(x-a_{2k-1})^2 + B(x-a_{2k-1}) + C \tag{5}$$

として，小区間 $[a_{2k-2}, a_{2k}]$ において曲線 $y=f(x)$ の代わりに上の 2 次曲線で近似する。このとき

$$\begin{aligned}
\int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x)\,dx &\fallingdotseq \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} \left\{A(x-a_{2k-1})^2 + B(x-a_{2k-1}) + C\right\} dx \\
&= \left[\frac{1}{3}A(x-a_{2k-1})^3 + \frac{1}{2}B(x-a_{2k-1})^2 + C(x-a_{2k-1})\right]_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} \\
&= \frac{1}{3}A(a_{2k}-a_{2k-1})^3 + \frac{1}{2}B(a_{2k}-a_{2k-1})^2 + C(a_{2k}-a_{2k-1}) \\
&\quad -\frac{1}{3}A(a_{2k-2}-a_{2k-1})^3 - \frac{1}{2}B(a_{2k-2}-a_{2k-1})^2 - C(a_{2k-2}-a_{2k-1}) \\
&= \frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch \\
&= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)
\end{aligned} \tag{6}$$

となる。

ここで，$a_{2k}-a_{2k-1}=a_{2k-1}-a_{2k-2}=h$，$a_{2k}-a_{2k-2}=2h$ が用いられた。2 次曲線の係数 A，B，C を y_{2k-2}，y_{2k-1}，y_{2k} で表すことにすると，（5）式で $x=a_{2k-2}$，a_{2k-1}，a_{2k} を代入すれば

$$y_{2k-2} = Ah^2 - Bh + C$$
$$y_{2k-1} = C$$
$$y_{2k} = Ah^2 + Bh + C$$

となる。

この式から A と C を逆に解くと，

$$A = \frac{1}{2h^2}(y_{2k-2} + y_{2k} - 2y_{2k-1}) \quad \text{および} \quad = y_{2k-1}$$

となり，これらの結果を（6）式に代入すると，

$$\int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x)dx \fallingdotseq \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) \tag{7}$$

が得られる。k について 1 から n までの和を取ると

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) \\ &= \frac{h}{3}\{y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})\}\end{aligned} \tag{8}$$

が導かれる。

これがシンプソンの公式と呼ばれる近似計算公式である。

3．シンプソン近似の誤差の限界

ここでは台形公式とシンプソンの公式の誤差の限界を取り扱う。私たちが取り扱う関数は多くの場合無限回微分可能な関数であるから，ここで取り扱う関数は与えられた区間を含む領域で無限回微分可能としてテーラー展開を利用する。

3-1 台形公式の誤差の限界

関数 $y = f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続であって，開区間（a，b）で 無限回微分可能であるとしよう。（2）式に戻ると

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx \fallingdotseq \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_k)h$$

である。そこで［a_{k-1}, a_k］での誤差の限界を考える。

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - \frac{1}{2}(y_{k-1}+y_k)h = F(a_k) - F(a_{k-1}) - \frac{1}{2}(y_{k-1}+y_k)h \tag{9}$$

ただし，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であり，$F(x)=f(x)$ である。ここで $x=a_{k-1}$ の周りのテーラー展開を考えると

$$\begin{aligned} F(a_k) &= F(a_{k-1}+h) \\ &= F(a_{k-1}) + \frac{F^{(1)}(a_{k-1})}{1!}h + \frac{F^{(2)}(a_{k-1})}{2!}h^2 + \frac{F^{(3)}(a_{k-1})}{3!}h^3 + \cdots \\ &= F(a_{k-1}) + \frac{f(a_{k-1})}{1!}h + \frac{f^{(1)}(a_{k-1})}{2!}h^2 + \frac{f^{(2)}(a_{k-1})}{3!}h^3 + \cdots \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} y_k &= f(a_k) \\ &= f(a_{k-1}+h) \\ &= f(a_{k-1}) + \frac{f^{(1)}(a_{k-1})}{1!}h + \frac{f^{(2)}(a_{k-1})}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a_{k-1})}{3!}h^3 + \cdots \end{aligned} \tag{11}$$

ただし，$F^{(n)}(x) = \dfrac{d^n F(x)}{dx^n}$ であり，$f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ である。また，明らかに $F^{(1)}(x)=f(x)$ である。これらを（9）式に代入すると

$$\begin{aligned} &\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - \frac{1}{2}(y_{k-1}+y_k)h \\ &= \frac{f(a_{k-1})}{1!}h + \frac{f^{(1)}(a_{k-1})}{2!}h^2 + \frac{f^{(2)}(a_{k-1})}{3!}h^3 + \cdots \\ &\quad -\frac{1}{2}\left\{2f(a_{k-1}) + \frac{f^{(1)}(a_{k-1})}{1!}h + \frac{f^{(2)}(a_{k-1})}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a_{k-1})}{3!}h^3 + \cdots\right\} \\ &= -\frac{1}{12}f^{(2)}(a_{k-1})h^3 - \frac{1}{24}f^{(3)}(a_{k-1})h^4 + \cdots \end{aligned} \tag{12}$$

そこで h は十分に小さいとして h^4 以後の項からの寄与を無視すると，

$$\begin{aligned} \left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - \frac{1}{2}(y_{k-1}+y_k)\right| &\quad \frac{1}{12}\left|f^{(2)}(a_{k-1})\right|h^3 \\ &\leqq \frac{1}{12}Mh^3 \end{aligned} \tag{13}$$

ただし，M は区間［a, b］で $\left|f^{(2)}(x)\right| \leqq M$ を満たす定数である。そこで k について 1 から n までの和をとると，台形公式の誤差の限界を Δ とすると，$h=\dfrac{b-a}{n}$ より

$$\Delta = \frac{1}{12} Mh^2 (b-a) \tag{14}$$

が得られる。これが台形公式の誤差の限界を与える式である。

3-2 シンプソンの公式の誤差の限界

計算は多少複雑になるが，考え方は台形公式の時と同様である。$y = f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続とし，開区間 $(a,\ b)$ で無限回微分可能とする。(7) 式に戻ると，小区間 $[a_{2k-2},\ a_{2k}]$ において

$$\int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x)dx \fallingdotseq \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$$

である。そこで，小区間 $[a_{2k-2},\ a_{2k}]$ で誤差の限界を考える。

$$\int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x)dx - \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) = F(a_{2k}) - F(a_{2k-2}) - \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) \tag{15}$$

ただし，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である。そこで，台形公式の場合と同様にテーラー展開を考える。

$$\begin{aligned} F(a_{2k}) &= F(a_{2k-2} + 2h) \\ &= F(a_{2k-2}) + \frac{F^{(1)}(a_{2k-2})}{1!}(2h) + \frac{F^{(2)}(a_{2k-2})}{2!}(2h)^2 + \frac{F^{(3)}(a_{2k-2})}{3!}(2h)^3 \\ &\quad + \frac{F^{(4)}(a_{2k-2})}{4!}(2h)^4 + \frac{F^{(5)}(a_{2k-2})}{5!}(2h)^5 + \cdots \\ &= F(a_{2k-2}) + \frac{f(a_{2k-2})}{1!}(2h) + \frac{f^{(1)}(a_{2k-2})}{2!}(2h)^2 + \frac{f^{(2)}(a_{2k-2})}{3!}(2h)^3 \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(a_{2k-2})}{4!}(2h)^4 + \frac{f^{(4)}(a_{2k-2})}{5!}(2h)^5 + \cdots \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} y_{2k-1} &= f(a_{2k-1}) \\ &= f(a_{2k-2} + h) \\ &= f(a_{2k-2}) + \frac{f^{(1)}(a_{2k-2})}{1!}h + \frac{f^{(2)}(a_{2k-2})}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a_{2k-2})}{3!}h^3 \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(a_{2k-2})}{4!}h^4 + \frac{f^{(5)}(a_{2k-2})}{5!}h^5 + \cdots \end{aligned} \tag{17}$$

$$
\begin{aligned}
y_{2k} &= f(a_{2k}) \\
&= f(a_{2k-2} + 2h) \\
&= f(a_{2k-2}) + \frac{f^{(1)}(a_{2k-2})}{1!}(2h) + \frac{f^{(2)}(a_{2k-2})}{2!}(2h)^2 + \frac{f^{(3)}(a_{2k-2})}{3!}(2h)^3 \\
&\qquad + \frac{f^{(4)}(a_{2k-2})}{4!}(2h)^4 + \frac{f^{(5)}(a_{2k-2})}{5!}(2h)^5 + \cdots
\end{aligned}
\tag{18}
$$

これらの式を（15）式に代入すると,

$$
\begin{aligned}
&\int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x)dx - \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) \\
&= \frac{f(a_{2k-2})}{1!}(2h) + \frac{f^{(1)}(a_{2k-2})}{2!}(2h)^2 + \frac{f^{(2)}(a_{2k-2})}{3!}(2h)^3 \\
&\quad + \frac{f^{(3)}(a_{2k-2})}{4!}(2h)^4 + \frac{f^{(4)}(a_{2k-2})}{5!}(2h)^5 + \cdots \\
&\quad - \frac{h}{3} f(a_{2k-2}) \\
&\quad - \frac{4h}{3}\left\{ f(a_{2k-2}) + \frac{f^{(1)}(a_{2k-2})}{1!}h + \frac{f^{(2)}(a_{2k-2})}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a_{2k-2})}{3!}h^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{f^{(4)}(a_{2k-2})}{4!}h^4 + \frac{f^{(5)}(a_{2k-2})}{5!}h^5 + \cdots \right\} \\
&\quad - \frac{h}{3}\left\{ f(a_{2k-2}) + \frac{f^{(1)}(a_{2k-2})}{1!}(2h) + \frac{f^{(2)}(a_{2k-2})}{2!}(2h)^2 + \frac{f^{(3)}(a_{2k-2})}{3!}(2h)^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{f^{(4)}(a_{2k-2})}{4!}(2h)^4 + \frac{f^{(5)}(a_{2k-2})}{5!}(2h)^5 + \cdots \right\}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

この式を整理すると，h の項，h^2 の項，h^3 の項および h^4 の項は互いにうち消しあって，h^5 の項以下が残る。その結果は

$$
F(a_{2k}) - F(a_{2k-2}) - \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) = -\frac{1}{90} f^{(4)}(a_{2k-2})h^5 + \cdots \tag{20}
$$

となる。h は十分小さいとして h^6 以後の項からの寄与を無視すると,

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x)dx - \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) \right| &\quad \frac{1}{90}\left| f^{(4)}(a_{2k-2}) \right| h^5 \\
&\leqq \frac{1}{90} M h^5
\end{aligned}
\tag{21}
$$

ただし，M は区間［a, b］で$\left| f^{(2)}(x) \right| \leqq M$ を満たす定数である。

そこで k について 1 から n までの和をとると，シンプソンの公式の誤差の限界を Δ とすると，$h=\dfrac{b-a}{2n}$ より

$$\Delta=\frac{1}{90}Mh^5n=\frac{1}{180}Mh^4(b-a) \tag{22}$$

が得られる。これがシンプソン近似の誤差の限界を与える式である。

4．結　び

このノートでシンプソン近似の誤差の限界をテーラー展開を用いて導いた。その理由は 3 年次の学生にはテーラー展開に関する知識が十分にあるからである。誤差の限界をテーラー展開を用いて導くと学生にとっては非常に理解しやすいものになる。だが，理論の厳密さから見ると曖昧さも残っている。最後にその点を少し論じておくことにする。

例えば（13）式において h は十分に小さいとして h^4 以上の高次の項からの寄与を無視した。また，同じ理由から（21）式でも h^6 より高次の項からの寄与を無視した。誤差の限界では 0 でない数字が現れる一番高い位が意味を持つ（その位で近似計算に初めて誤差が現れる）。従って，それより低い位の数が現れてもその数は誤差の限界にとっては意味を持たない。例えば h=0.1 とすると，h^3 に比べて h^4 は一つ位の低い数を与える。従って，誤差が現れる最も高い位の数を与えるのは h^3 の項となる。このように h=0.1 でも h は十分に小さいと考えてよいことになる。これが h が十分小さいとして（13）式で h^4 より高次の項からの寄与を無視した理由である。同じ理由から（21）式で h^6 より高次の項からの寄与を無視した。このように h が十分小さいとき h の高次の項からの寄与を無視するに十分な理由がある。

しかし，数学的厳密さから言えば曖昧さがない訳ではない。それは誤差の限界を導く際に，（13）式あるいは（21）式で一度近似した結果に対して上限を与えているという手続きを行っていることである。厳密に考えればこの手続きには問題がある。この点を厳密に論じようとすればテーラーの定理を用いるしかない。しかし，数学的厳密さを優先した議論を行うと，学生にかえって事の本質を見失わせる可能性がある。その意味から，本ノートでは h は十分に小さいことを念頭において，テーラー展開を用いて誤差の限界の式が導かれた。

ここではテーラー展開を用いてシンプソン近似の誤差の限界についての簡単な導出が行われた。学生にとって，単に公式を利用するだけでなく，その導出を理解してその公式を利用したらその公式を利用する意味は更に深くなると思われる。シンプソン近似計算の誤差の限界に関するこの短いノートが学生の勉学や研究に役立つことを期待している。

参　考　文　献

1）田川生長他；微分積分 I，大日本図書（1994 年）